

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM

PROCEEDINGS

VOLUME XXXIX

No. 4

President: J. VAN DER HOEVE

Secretary: B. BROUWER

CONTENTS

- JAEGER, F. M., E. ROSENBOHM and R. FONTEYNE: "The Exact Measurement of the Specific Heats of Metals at High Temperatures. XXIII. The Calorimetric, Electrical and Thermoelectrical Behaviour of Ductile Titanium". I, p. 442.
- JAEGER, F. M., E. ROSENBOHM and R. FONTEYNE: "The Exact Measurement of the Specific Heats of Metals at High Temperatures. XXIII. The Calorimetric, Electrical and Thermoelectrical Behaviour of Ductile Titanium". II, p. 453.
- JAEGER, F. M., E. ROSENBOHM and R. FONTEYNE: "The Exact Measurement of the Specific Heats of Metals at High Temperatures. XXIV. The Calorimetric, Electrical and Thermoelectrical Behaviour of Ductile Titanium". III, p. 462.
- ROSENBOHM, E., and F. M. JAEGER: "The Determination of the Thermoelectrical Force of Metals in a Vacuum by means of the Photographically recording Double Galvanometer", p. 469.
- KREVELD, A. VAN, and L. S. ORNSTEIN: "The most general photographic density-law", p. 477.
- ORNSTEIN, L. S., and H. BRINKMAN: "Remark to the paper: The mechanism in the positive column of a discharge", p. 484.
- VRIES, JAN DE: "Konfigurationen von Punkten und Kreisen", p. 486.
- CORPUT, J. G. VAN DER: "Verteilungsfunktionen". (Siebente Mitteilung), p. 489.
- CORPUT, J. G. VAN DER: "Ueber einige VINOGRADOFFsche Methoden". (Zweite Mitteilung), p. 494.
- WEITZENBÖCK, R.: "Zur Theorie der p -Relationen", p. 503.
- NIJLAND, A. A.: "Mittlere Lichtkurven von langperiodischen Veränderlichen. XXVII. *R Canum Venaticorum*". (With one plate), p. 509.
- BOER, J. H. DE, W. G. BURGERS and J. D. FAST: "The transition of hexagonal α -Titanium into regular β -Titanium at a high temperature". (Communicated by Prof. G. HOLST), p. 515.
- MEIJER, C. S.: "Einige Integraldarstellungen aus der Theorie der BESSELSchen und WHITTAKERSchen Funktionen". (Zweite Mitteilung). (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 519.
- SPIERENBURG, C. A.: "Das Komitantensystem einer kubischen und zweier quadratischen binären Formen". (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK), p. 528.
- BOTH, M. P.: "Transport of nitrogenous substances under influence of differences in humidity". (Communicated by Prof. J. C. SCHOUTE), p. 531.
- EYKEN, B. VAN DER: "Gebiss- und Zahnentwicklung bei der Irisforelle (*Salmo Irideus*). IV. Zwischenkiefer und Pflugscharbein". (Communicated by Prof. M. W. WOERDEMAN), p. 541.

OHM, J.: "Ueber Interferenz mehrerer Arten von Nystagmus". (Communicated by A. DE KLEYN), p. 549.

BUCK, A. DE; "Degenerated cysts and black spores in Anopheles infected with benign tertian malaria". (Communicated by Prof. W. A. P. SCHÜFFNER). (With two plates), p. 559.

Chemistry. — *The Exact Measurement of the Specific Heats of Metals at High Temperatures. XXIII. The Calorimetric, Electrical and Thermoelectrical Behaviour of Ductile Titanium. I.* By F. M. JAEGER, E. ROSENBOHM and R. FONTEYNE.

(Communicated at the meeting of March 28, 1936).

§ 1. Several elements of the fourth group of the periodical system manifest the phenomenon of *allotropism*: *carbon* is cubic (*diamond*-structure), like *silicon*, *germanium* and (grey) *stannum*; the other form of *carbon* is ditrigonal (*graphite*). Of *silicon* only *one* form is known, as the other two, considered for some time as "new" modifications, were established by later work to be identical with the *diamond*-like form already mentioned. While *stannum* (white) still has *two* other allotropic phases, which are tetragonal and rhombic respectively, *titanium*, *zirconium* and *hafnium* for a long time were merely known in their close-packed hexagonal forms; later-on a cubic body-centred modification of *zirconium* was, moreover, found¹⁾ to exist at higher temperatures (870° C.) and doubtlessly in the case of *titanium* there is above ca. 880°—905° C. a corresponding, body-centred β -form²⁾. It seems feasible, therefore, to suppose the probable existence of such a cubic modification at higher temperatures also in the case of *hafnium*, although no direct evidence could hitherto be gathered in this respect. Of both *lead* and *thorium* only *one* cubic, face-centred form is known to exist.

The data relative to the specific heats of the elements of this group, with the exception of those of *titanium* and *hafnium*, are pretty well known at this moment. As to the values of the mean specific heats of *titanium*, the verdict in the literature is that they are "variable"; NILSON and PETTERSON³⁾ as well as HUNTER and JONES³⁾ determined some values of \bar{c}_p at temperatures up to 450° C.:

NILSON and PETTERSON:		HUNTER and JONES:	
$\bar{c}_p = 0,1125$	between 100° and 0°C.	$\bar{c}_p = 0,1462$	between 100° and 0°C.
$\bar{c}_p = 0,1288$	" 211° and 0°C.	$\bar{c}_p = 0,1503$	" 187°,5 and 0°C.
$\bar{c}_p = 0,1485$	" 301°,5 and 0°C.	$\bar{c}_p = 0,1516$	" 254° and 0°C.
$\bar{c}_p = 0,1620$	" 440° and 0°C.	$\bar{c}_p = 0,1563$	" 333° and 0°C.

¹⁾ W. G. BURGERS, *Physica*, **1**, 561 (1934); *Zeits. f. anorg. Chem.*, **205**, 81 (1932).

²⁾ In the mean time, this is finally demonstrated by J. H. DE BOER, W. G. BURGERS and J. D. FAST; see *Proc. Royal Acad. Amsterdam*, **39**, 515 (1936).

³⁾ L. F. NILSON and O. PETTERSON, *Zeits. phys. Chem.*, **1**, 28 (1887); M. A. HUNTER and E. C. JONES, *RENSSELAER Polyt. Inst.*, **1**, 11 (1911); cf. *Journ. Amer. Chem. Soc.*, **32**, 330 (1910); J. DEWAR, *Proc. R. Soc. London, A*, **89**, 158 (1913); P. NORDMEYER and A. L. BERNOUILLI, *Ber. Deuts. phys. Ges.*, **9**, 175 (1907).

which involve a rather queer shape of the \bar{c}_p - t -curve and an extra-ordinarily rapid increase of the atomic heats with the temperature. The atomic heats thus determined do, however, *not* show the low values at ordinary temperature, like they are observed in the case of *diamond* and *silicon*.

The values mentioned above are, indeed, rather strongly divergent. DEWAR, moreover, determined, the specific heat \bar{c}_p between -253° and -196° C. at 0,0205; NORDMEYER and BERNOUILLI found $\bar{c}_p = 0,0824$ between -185° and 20° C.

From a rather old determination of the electrical conductivity of (still impure) *titanium* by KOENIGSBERGER and SCHILLING¹⁾, the conclusion can be drawn, that also in this case, as in that of *zirconium*²⁾, on cooling the metal from higher temperatures to lower ones, strong *retardation*-phenomena may occur; so that, besides the possibility emphasized by the German authors of a *trimorphism* being present in this case, we could, according to our previous experiences, expect to meet here again with an abnormal calorimetric behaviour in the same or in an analogous way as in the cases of *beryllium*, *chromium*, *zirconium*, *cerium*, etc.

§ 2. By the kindness of Prof. G. HOLST and of Dr. J. H. DE BOER of PHILIPS' *Incandescent Lamp Works* at Eindhoven, we had at our disposal the very beautiful preparation of purest *ductile titanium*, obtained by VAN ARKEL and DE BOER⁴⁾ after their well-known method of the thermal dissociation of TiI_4 and precipitation of the free metal upon a negatively charged, extremely thin *tungsten* wire: the highly lustrous metal was present in the shape of coherent masses of partially orientated, big, pseudomorphic crystals. This preparation, in pieces of about 1 cm length and 0,3 cm diameter, was placed in a vacuum platinum crucible of the form always used in our calorimetric measurements. Moreover, for our determination of the electrical resistance and of the thermoelectrical force (against pure *gold*), the results of which are communicated in the following papers, — Dr. DE BOER provided us with *titanium wire* of about 0,3—0,6 mm diameter, drawn from the same material; to him and to Prof. HOLST we wish once more to express our sincere thanks.

Titanium melts at 1795° or somewhat above 1800° C.⁵⁾; its crystals remain lustrous and apparently unaltered when exposed to the air. However, the metal has a strong tendency to condense gases at its surface, especially oxygen and nitrogen; as we will see, this fact is of great

¹⁾ J. KOENIGSBERGER and K. SCHILLING, *Ann. d. Phys.*, (4), **32**, 179 (1910).

²⁾ F. M. JAEGER and W. A. VEENSTRA, *Rec. d. Trav. d. Chim. d. Pays-Bas*, **53**, 917 (1934).

³⁾ F. M. JAEGER and E. ROSENBOHM, *Rec. d. Trav. d. Chim. d. Pays-Bas*, **53**, 451 (1934); *Proc. Royal Acad. Amsterdam*, **37**, 489 (1904); F. M. JAEGER and W. A. VEENSTRA, *loco cit.*

⁴⁾ A. E. VAN ARKEL and J. H. DE BOER, *Zeits. f. anorg. Chem.*, **148**, 345 (1925).

⁵⁾ G. K. BURGESS and R. G. WALTENBURG, *Journ. Wash. Acad. Sc.*, **3**, 371 (1913); *Zeits. f. anorg. Chem.*, **88**, 361 (1913).

importance with respect to the results obtained and for this reason it is absolutely necessary to make all experiments with it in as perfect a vacuum as possible. The α -form, stable at lower temperatures (beneath about 905°C .), is hexagonal¹⁾; its close-packed structure has the parameters: $a_0 = 2,95\text{ \AA}$; $c_0 = 4,69\text{ \AA}$ and the density is 4.49. The β -form, stable above $880^\circ\text{--}905^\circ\text{C}$., is doubtlessly cubic, with a body-centred cell and a parameter a_0 of about $3,3\text{ \AA}$. Hitherto, however, we were *not* able to obtain a measurable X-ray spectrum, because of the fact that, as the power of diffraction of the metal is very weak, the time of exposure must be very long (20—25 hours); and as even in our high-vacuum camera (about 0,001 mm pressure) the thin wire, — as a consequence of traces of oxygen being inevitably and continually present, — always during its exposure gets covered with an extremely thin superficial layer of TiO_2 and TiO , only the spectrum of the oxides was predominantly observed.

But certainly the β -modification will appear to be isomorphous with that of *zircon*²⁾. After heating at 950°C ., the structure of the wire is so thoroughly changed and it has become so brittle, that it cannot be used a second time and in no way can bear being touched. As in the prevailing circumstances a great excess of the metal is present in contact with the small traces of oxide formed, evidently a series of partial reductions take place at these high temperatures, leading i.a. to the formation of the mon-oxide TiO , — the diffraction lines³⁾ of which (cubic, face-centred cell with

1) A. W. HULL, *Phys. Rev.*, **18**, 88 (1921); R. A. PATTERSON, *ibid.*, **25**, 581 (1925); 26, 56 (1925).

2) This is, in the mean time, confirmed by J. H. DE BOER, W. G. BURGERS and J. D. FAST of the PHILIPS' *Incandescent Lamp Works*, who found a body-centred cubic cell with: $a_0 = 3,32\text{ A.U.}$ They used a wire enclosed in the original vessel in which it was formed, so that it had never been in contact with any trace of oxygen; in this way the troublesome production of the oxide was completely avoided. The transition-temperature was found at $882^\circ \pm 20^\circ\text{C}$.; see their paper in these same Proceedings (see p. 515).

3) H. BRÄKKEN, *Zeits. f. Kryst.*, **67**, 547 (1928). Here it must be remarked, that the structure of this oxide probably is the same (NaCl -type) as that of TiN and TiC and, according to BRÄKKEN, is built up by *atoms*, rather than by *ions*. The parameter is very near to that of the (body-centred) cell of β -*zirconium* and, therefore, most probably to that of β -*titanium*; but the three substances are *not* isomorphous. As to the other oxides of *titanium*, TiO_2 was observed as *rutile*, the form stable above 1040°C ., which already above 650°C . is produced with measurable speed from *brookite*, — the form stable in the interval of $860^\circ\text{--}1040^\circ\text{C}$., 860°C . being the transition-point for *anatase* \leftrightarrow *brookite*. Ti_2O_3 (or: $\text{TiO} \cdot \text{TiO}_2$) is trigonal and isomorphous with *corundum*: Al_2O_3 ; Ti_3O_4 (or $\text{TiO} \cdot \text{Ti}_2\text{O}_3$) is cubic, face-centred and has a *magnetite*-(*spinell*-)structure. Ti_3O_5 (or $\text{TiO}_2 \cdot \text{Ti}_2\text{O}_3$) was observed by FRIEDEL and GUÉRIN, *Bull. Soc. Chim.*, (2), **23**, 289 (1875); *Compt. rend. Paris*, **82**, 569 (1876); its crystal-structure is unknown. None of these compounds evidently is isomorphous with the metal itself, although the possibility is not excluded that, to some extent at least, they may yield with it solid solutions of feeble concentration. The oxides all seem able, in the presence of a *great excess* of *titanium*, to be partially reduced into lower oxides or mixtures of them, if the temperature is sufficiently increased. This fact seems to be of importance with respect to some phenomena to be dealt with afterwards.

$a_0 = 4.24 \text{ \AA}$) were found present on the film with the reflections: (111), (200), (220), (311), (222), (331), (420), (422) and (333), besides others not well determinable. As to these reduction-processes mentioned, we afterwards will return to them, in connection with some other observations made in the course of our experiments.

§ 3. *Calorimetical Measurements.* The measurements of the quantities of heat given off by the vacuum crucible were made with all precautions and the indications of the thermocouples, as well as the right condition of the calorimeter, were continually checked by alternating determinations of \bar{c}_p of pure and stabilized *platinum*. The weight of the platinum crucible was 28,106 grammes, that of the *titanium* enclosed in it: 8,590 grammes. Originally a distinct retardation in the heat-development was observed, the maximum temperature of the calorimeter-block being reached only 14—32 minutes after the introduction of the crucible into the instrument; this interval first increased every time on approaching the minor discontinuity-temperatures at 298° and 555° C. , but it remained practically constant at that of about 817° C. , as long as the true allotropic transition-temperature at about 880° — 906° C. was *not* surpassed. After *heating above that temperature* (up to about 950° C.), however, the interval mentioned suddenly dropped to $4\frac{1}{2}$ minutes and at all other temperatures, even the lower ones, it then remained practically, but not completely *constant*, — a slight hysteresis-effect still remaining observable. Notwithstanding this, however, *all values previously observed remained almost unchanged* and proved at all temperatures to be *quite reproducible* within some tenths of a percentage. Consequently in this case the experimental values observed appear to be almost *independent* of the retardation phenomena and both categories of data can, therefore, practically be separated from each other, in contrast with our experience gained in some previous cases. The data thus obtained are collected in Table I and graphically represented in Figs. 1 and 2.

§ 4. If these data of Q_{20}° are plotted against the temperature, small discontinuities in the Q_{20} - t -curve are revealed at temperatures of about 297° — 300° , at 398° — 400° , at about 554° , at 640° , at 817° C. Originally they were thought to be accidental errors, but soon they proved to be *almost perfectly reproducible*, — be it on heating or on cooling and practically, but not quite independently of the fact, whether the retardation phenomena are still present or have beforehand been eliminated. The minute differences after and before the heating at 950° C. may be seen from the table. We soon will prove, that their reality can also be corroborated by means of other methods (see the following paper).

A careful control by means of X-ray analysis, however, proved that within this whole temperature-interval from about 150° to 900° C. *no change of the structure of the metal* occurs, — in full agreement with the

TABLE I.
Quantities of Heat delivered by 1 Gramme of Titanium between t° and 20° C.

Series- Number of the Exp.:	Temperature t in $^\circ\text{C}.$:	Final tempe- rature t' of the Calori- meter:	Increase of temperature Δt of the Calorimeter:	Heat Q_{20} de- veloped by 1 Gr. of Tita- nium between t° and $20^\circ\text{C}.$:	Time necessa- ry for reaching the maximal temperature of the Calorime- ter block (in Minutes):	Mean Specific Heat \bar{c}_p be- tween t° and $20^\circ\text{C}.$:
29	219.74 ⁵	21.321	1.361	25.788	4.5	0.12911
11	266.54	21.522	1.507	32.450	16	0.13162
3	266.63	21.470	1.455	32.456	15	0.13160
12	271.24 ⁵	21.710	1.695	33.071	14	0.13163
13	279.60	21.616	1.601	34.361	15	0.13236
14	296.68	21.446	1.431	36.763	15	0.13287
19	298.68 ¹	21.611	1.653	36.840	17	0.13220
32	298.79 ²	21.605	1.646	36.790	4.5	0.13196
4	299.16	21.557	1.542	36.647	18	0.13128
22	299.28	22.155	2.198	36.812 ³	19	0.13181
15	301.63	21.790	1.832	37.200	16	0.13209
16	307.61	21.866	1.910	38.015	11	0.13218
17	320.04 ³	21.405	1.449	40.014 ⁵	16	0.13336
5	320.27	21.725	1.710	40.047	20	0.13337
7	369.68 ⁵	21.905	1.890	47.100	21	0.13488
39	381.40 ⁸	21.967	2.047	48.153	4.5	0.13324
38	384.86	21.301	1.368	48.473	4.5	0.13286
37	392.40	21.543	1.588	49.455	4.5	0.13280
36	401.38 ²	21.963	2.006	51.028	4.5	0.13380
6	419.27	21.919	1.904	54.142	22	0.13560
8	499.84	22.352	2.337	66.522	24	0.13863
18	524.49	22.352	2.395	70.025	15	0.13880
31	544.44 ²	22.089	2.130	72.726	4.5	0.13867
23	544.49 ²	21.898	1.941	72.821	27	0.13884
25	549.38 ⁶	21.812	1.851	73.458	26	0.13876
9	551.06	22.035	2.020	73.241	32	0.13792
26	551.17	22.538	2.577	73.678	26	0.13871

TABLE I. (Continuation).
Quantities of Heat delivered by 1 Gramme of Titanium between t° and 20° C.

Series- Number of the Exp.:	Temperature t in $^\circ\text{C}.$:	Final tempe- rature t' of the Calori- meter:	Increase of temperature Δt of the Calorimeter:	Heat Q_{20} de- veloped by 1 Gr. of Tita- nium between t° and 20° C.:	Time necessa- ry for reaching the maximal temperature of the Calorime- ter block (in Minutes):	Mean Specific Heat \bar{c}_p be- tween t° and 20° C.:
24	554.25	22.283	2.320	74.478	26	0.13941
21	562.76 ⁸	21.879	1.922	75.913	22	0.13986
20	574.39	22.058	2.090	77.566	20	0.13991
53	623.46 ⁶	22.226	2.178	85.082	4.5	0.14099
10	630.03 ⁸	22.116	2.101	86.510	22	0.14017
42	664.80	22.154	2.096	91.442	4.5	0.14181
40	682.87	22.556	2.556	94.410	4.5	0.14242
43	692.14	22.172	2.112	95.670	4.5	0.14234
41	710.78	22.201	2.148	99.130	4.5	0.14351
27	719.22 ⁷	23.394	2.433	100.443	22	0.14365
44	730.09	22.257	2.197	102.357	4.5	0.14415
49	757.75 ⁸	22.501	2.463	107.390	4.5	0.14556
50	779.72	22.491	2.451	110.935	4.5	0.14602
1	801.20	22.760	2.745	117.073	14	0.14986
2	801.25	22.712	2.697	117.050	14	0.14983
52	801.08	22.498	2.450	115.240	4.5	0.14754
51	808.36	22.420	2.371	116.650	4.5	0.14796
48	818.99	22.606	2.568	119.18	4.5	0.14916
46	839.29 ³	22.418	2.358	123.23	4.5	0.15041
47	851.41 ⁷	22.584	2.546	126.52	4.5	0.15217
54	869.80 ⁷	22.002	2.272	133.29	4.5	0.15685
34	887.72	22.900	2.926	141.390	4.5	0.16295
35	917.90	23.010	3.045	151.169	4.5	0.16797
30	936.50	22.881	2.921	155.718	4.5	0.16991
45	1029.35	22.934	2.874	170.10	4.5	0.16852
28	1063.50	23.036	3.075	175.816	4.5	0.16849
33	1202.42	22.887	2.933	197.50	4.5	0.16703
55						

experiences of previous investigators¹⁾). However, if the metal is heated above 950° C., certainly another spectrogram appears, besides that of TiO or of rutile; but as already mentioned in the above, its interpretation

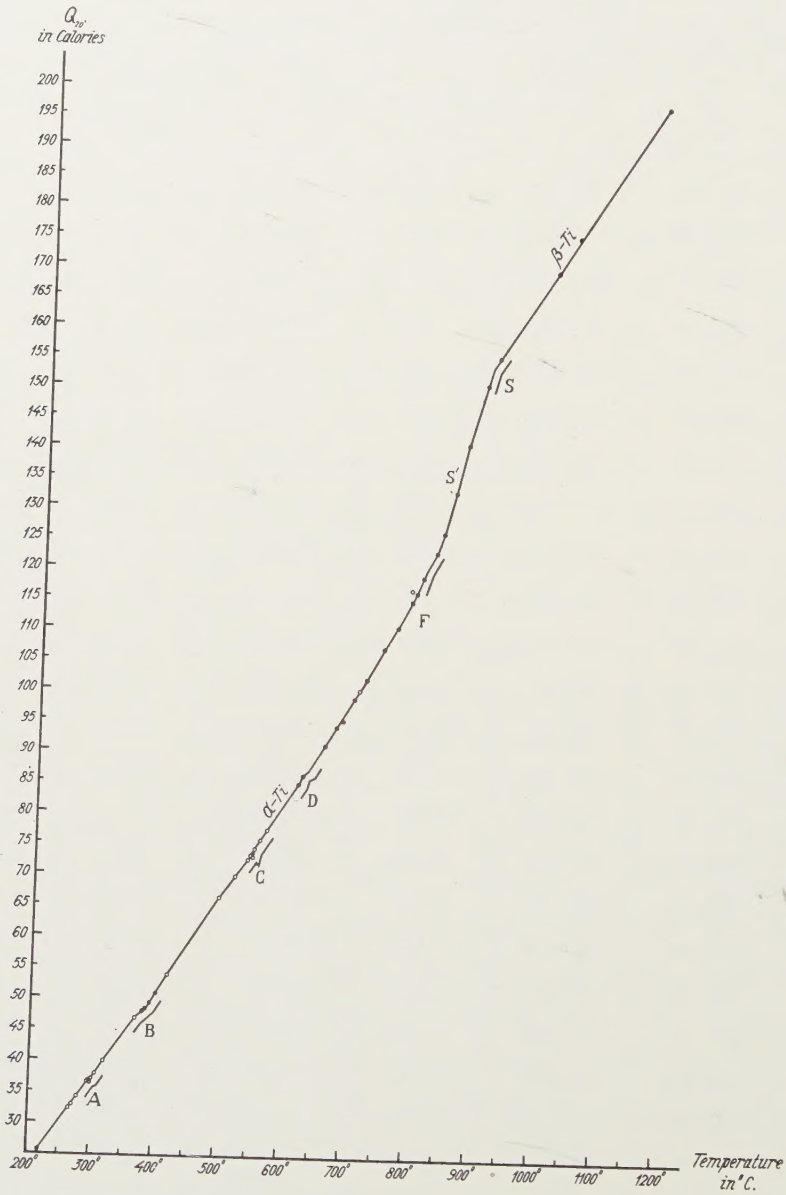


Fig. 1. Quantities of Heat given off between $t^{\circ}\text{C.}$ and 20°C.

hitherto proved to be very difficult, owing to the faintness of the lines

¹⁾ R. A. PATTERSON, *loco cit.*, just as we, did not find any change of the structure between -180° and 850°C.

and the lack of sufficient sharpness of the latter (see, however, note 2) on pag. 444.

In Fig. 2 we have, instead of Q , plotted the *mean specific heats* \bar{c}_p against the temperature, for the purpose of better being able to demonstrate the

Mean Specific Heats \bar{c}_p

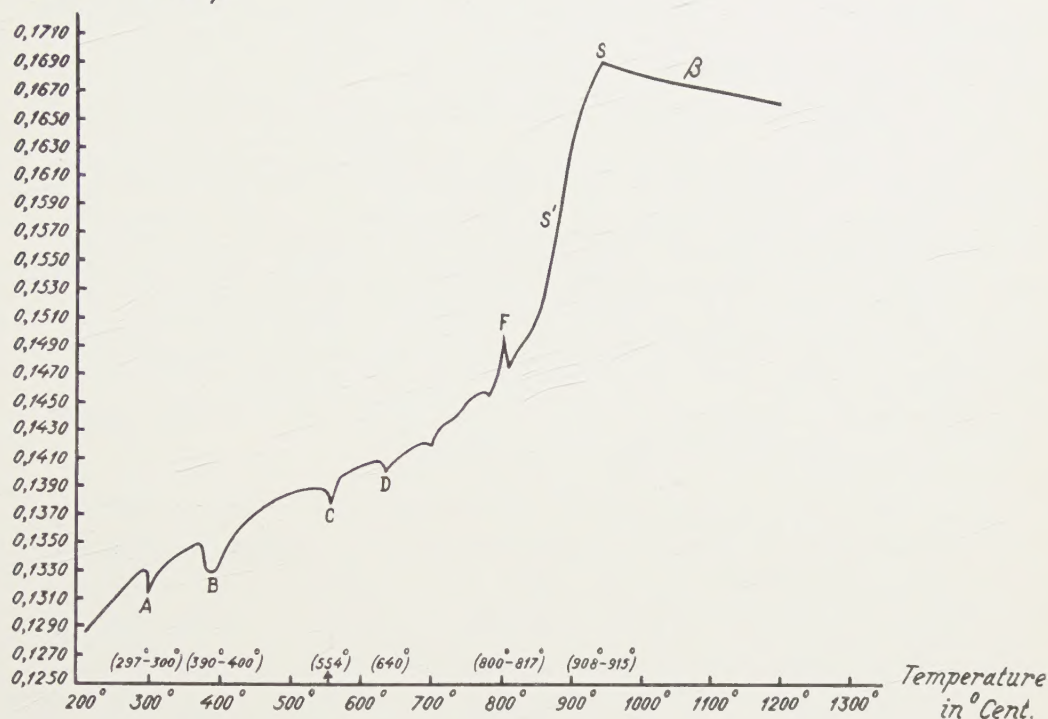


Fig. 2. Mean Specific Heats \bar{c}_p of Titanium between 150° and 1200° C.

said anomalies, which in this way may be very clearly seen from the zigzag shape of the curve¹⁾. If for the moment, we leave them out of consideration, because they are evidently caused by an accessory phenomenon, — then the curve as a whole still preserves its rather particular character in so far as between the points C and D there somewhere is an inflection-point and, after this, the curve rises in an unexpectedly steep way between F till a little before S, where a sudden break in it appears, corresponding to the apparition of the β -modification. Here a new branch begins, corresponding to the field of stability of the cubic β -form.

The quantities of heat Q_{20° delivered by 1 gramme of titanium between

¹⁾ The small hysteresis-effects remaining after heating at 950° C., especially at 300° C. and at 550° C., are not represented in this figure, but may be seen from the numbers in Table I. Perhaps they are in some way connected with another effect occurring between 150° and 250° C. (see the thermoelectrical properties of the metal, in one of the following papers).

the temperatures of 200° and 817° C. can readily be expressed by the formula¹⁾ :

$$Q_{20^\circ} = 0,08724 \cdot t + 0,18926 \cdot 10^{-3} \cdot t^2 - 0,271055 \cdot 10^{-6} \cdot t^3 + 0,151877 \cdot 10^{-9} \cdot t^4$$

Therefore, the true specific heats c_p by:

$$c_p = 0,08724 + 0,37852 \cdot 10^{-3} \cdot t - 0,813165 \cdot 10^{-6} \cdot t^2 + 0,607508 \cdot 10^{-9} \cdot t^3,$$

and the atomic heats C_p by:

$$C_p = 4,1964 + 0,018208 \cdot t - 0,39114 \cdot 10^{-4} \cdot t^2 + 0,29223 \cdot 10^{-7} \cdot t^3.$$

Of course, these formulae may not be used at lower temperatures than 200° C.

If the correction for the interval between 20° and 0° is taken into account, the values of C_p will, of course, be slightly superior to those calculated from this formula for temperatures between 200° C. and 817° C.; but, as may be seen from the following numbers, the C_p - t -curve, although showing a very steep temperature-gradient, does *not* seem to indicate the occurrence of such small values of C_p at ordinary temperatures as are found in the cases of *boron*, *carbon* and *silicon*:

Temperature t in ° Cent.:	Specific Heats c_p :	Atomic Heats C_p :
200°	0.13528	6.507
300	0.14401	6.927
400	0.14743	7.092
500	0.14916	7.175
600	0.15285	7.352
700	0.16215	7.800
800	0.18069	8.692
817	0.18509	8.901

§ 5. The range from about 817° to 905° C. being a "transition-interval" preceding a true allotropic change, needs special consideration. As long as the temperature of measurement did not surpass 920° C., the retardation of the heat-development was always observed in this interval, — as often

¹⁾ The values of Q_{20} calculated from the formula are: at 200° C.: 23,0931 cal.; at 300° C.: 37,1173 cal.; at 400° C.: 51,7184 cal.; at 500° C.: 66,5459 cal.; at 600° C.: 81,6136 cal.; at 700° C.: 97,2999 cal.; at 800° C.: 114,3483 cal. These values are in fairly good agreement with those observed, with the exception, of course, of the intervals in the vicinity of the discontinuities at the temperatures 297°, 554°, etc.

happens in cases of slow allotropic changes in the vicinity of the transition-point.

This character as a "transition-interval" reveals itself, indeed, if one tries to calculate the values of the "true" specific heats c_p and the corresponding "atomic" heats between 850° and 900° C. from the directly observed data for Q_{20}° . According to the specially chosen way of calculation¹⁾, the "apparent atomic heats" prove somewhat to vary, but in every case they amount to *quite impossibly high values*: 14,87 to 17,73 cal. at 850° C.; 22,0 to 22,9 cal. at 880° C.; and 24,2 to 26,9 cal. at 890° C.; at 900° C. they even reach 26 to 33,5 cal., according to the special temperature-intervals used in the calculation.

These values, therefore, do not any longer allow a sound theoretical interpretation, but they merely indicate that a state of *structural disturbance* has set in, caused perhaps by a particular intermediate phase composed of the two modifications in undefinable proportions within this interval of the temperatures. As above 905° C. the field of existence of the then stable β -titanium is certainly reached, the true atomic heat of which, —

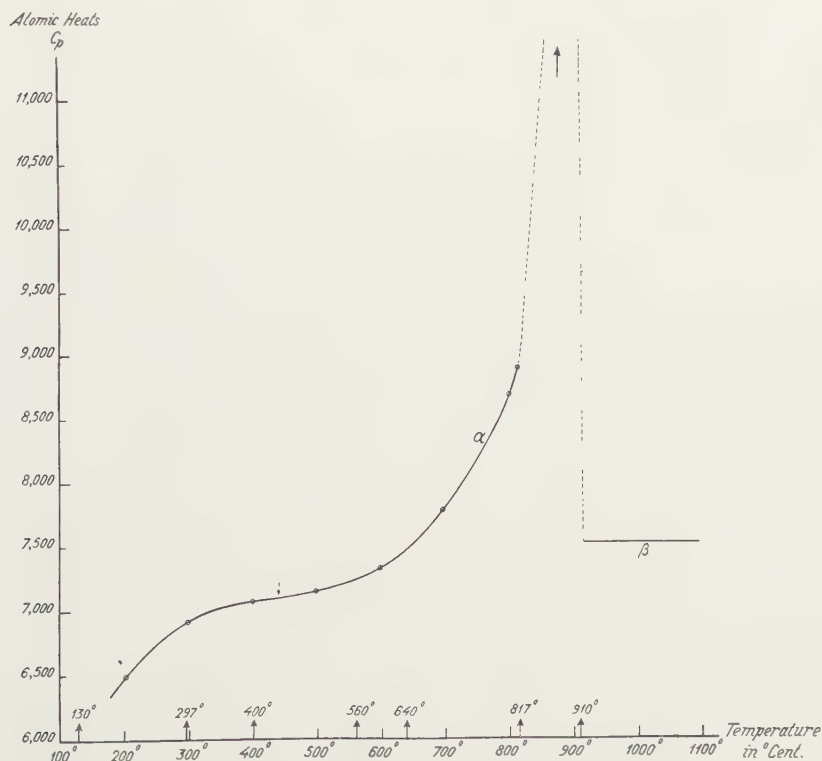


Fig. 2. True Atomic Heats of Titanium between 150° and 1200° C.

¹⁾ If $t' = (t - 850)$, C_p can e.g. be calculated from the formula: $C_p = 14,87 + 0,275 \cdot t' - 0,00104 \cdot (t')^2$. At 905° C., C_p then certainly amounts to more than 35 calories.

just as in the case of *iron*, — proves to be *independent* of the temperature and to be equal to 7,525 cal., — the whole curve for C_p of *titanium* in function of the temperature has the shape represented in Fig. 3.

The typical shape of the C_p - t -curve, being thus determined, with its inflection-point in the neighbourhood of or somewhat lower than 600° C. ($C_p = 7,25$), evidently has a close resemblance to that found in the case of *beryllium*¹⁾ and suggests a *slow* transformation going on in the solid phase within the interval of temperatures considered and proceeding with an ever more increasing speed, till at about 906° C., after the transition-point is surpassed, C_p suddenly falls off to the constant and much lower value of 7,525 cal. of the β -modification. This change doubtlessly must be considered as partially connected with the remarkable hysteresis-effects also met with, as we will see, in the study of the electrical resistance and of the thermoelectrical behaviour of the metal. Later-on we will consider those phenomena more closely in connection with the question as to the significance of the small discontinuities in the Q - t -curve mentioned above.

*Groningen, Laboratory for Inorganic and
Physical Chemistry of the University.*

¹⁾ F. M. JAEGER and E. ROSENBOHM, Rec. d. Trav. d. Chim. d. Pays-Bas, **53**, 460 (1934). The difference with the case of *titanium*, however, is, that with *beryllium* the retardation-effect precisely *increases* with augmenting temperatures, whilst in the case of *titanium* it practically disappears after heating above 950° C., —at least in so far as the calorimetrical measurements are concerned. The inflection-point is better localized at about 600° C. than at about 420° C., because it certainly is influenced by the discontinuous change occurring between 150° and 250° C.

Chemistry. — *The Exact Measurement of the Specific Heats of Metals at High Temperatures. XXIII. The Calorimetric, Electrical and Thermoelectrical Behaviour of Ductile Titanium. II.* By F. M. JAEGER, E. ROSENBOHM and R. FONTEYNE.

(Communicated at the meeting of March 28, 1936).

§ 1. In our previous paper we have drawn attention to the fact that, besides the true allotropic change of *titanium* at about 882° — 900° C. into a cubic β -form, a series of minor "transition"-points were found by the calorimetric measurements, although *no* allotropic changes could be stated at those temperatures by means of X-ray analysis. In the present paper we have in the first place, made a series of tentatives to corroborate the existence of these minor transition-points by means of *differential heat-capacity-curves*, obtained by the aid of the experimental device previously described¹⁾ and to control their presence further by the measurement of the *electrical resistance* of the metal in its dependence on the temperature, according to the twin galvanometer-method also previously dealt with²⁾.

§ 2. *The Minor Transition-points of Titanium as revealed by differential Heat-capacity-curves.* As to the way of determining the *differential curves* according to the method mentioned above, we can refer to our previous publication¹⁾ on this subject.

The experiments made with *titanium*, — *copper* being used as a standard of comparison, — now completely corroborated the results obtained in the calorimetric measurements in so far, as about *the same* discontinuities at only slightly different temperatures as in those experiments were also found in the curves recorded in this case, — the localization of these points being somewhat dependent on the way of heating and cooling and on a number of hysteresis-effects manifesting themselves on several occasions. More especially reproducible breaks in the curves at 250° — 270° , 297° — 300° , at about 508° , at about 631° and at 882° C. etc. were observed, which, however, showed a tendency to become gradually somewhat less pronounced when the heatings and coolings were very often repeated with the same sample, — with the exception of the break at 882° C., which corresponds to the transition: $\alpha\text{-Ti} \rightleftharpoons \beta\text{-Ti}$. The latter fact, as we shall see, was also stated in the measurements of the electrical resistance, the results of which are, for the rest, in very close agreement with those mentioned. In Fig. 1 four successive parts of the curve observed are reproduced, from which the localization of the different minor discontinuities can be verified.

1) E. ROSENBOHM and F. M. JAEGER, Proc. Royal Acad. Amsterdam, **39**, 366 (1936).

2) Idem, Proc. Royal Acad. Amsterdam, **39**, 374 (1936).

By comparison with *nickel*, the order of magnitude of these discontinuities proves to be about the same as that at the transitionpoint of $\alpha \rightleftharpoons \beta$ -nickel.

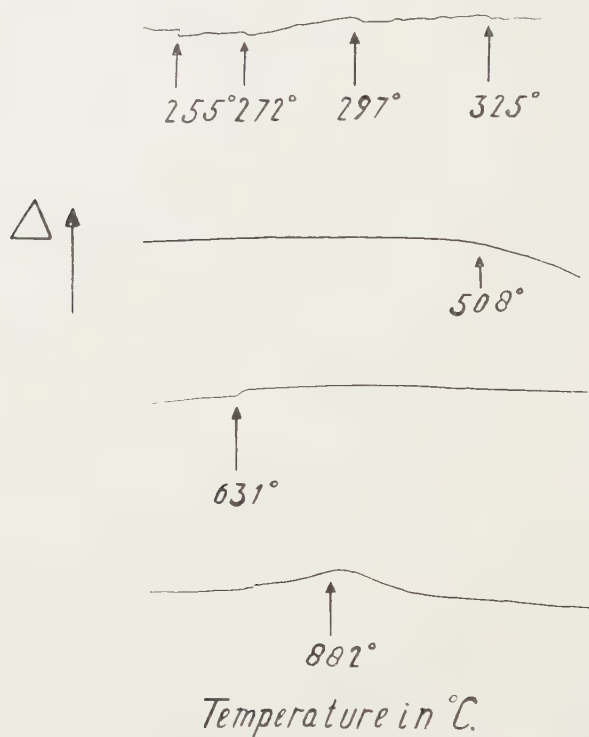


Fig. 1. Breaks in the Differential curves at Different Temperatures.

§ 2. *Measurements of the Resistance of Titanium at different Temperatures.* As to the technique of these determinations we refer to our previous communication about this subject.

Originally we used a *titanium*-wire, the diameter of which as well as its length being varied in the successive experiments; its resistance at 20° C. for $\delta = 0,31$ mm and $l = 358$ mm e.g. proved to be $2,993 \Omega$, while that of the connections outside the vacuum tube was $0,021 \Omega$ and inside it $0,0014 \Omega$. The following values of the resistances observed are all corrected, except for the very small change in resistance of the connections within the furnace as a consequence of their variation with its temperature. The arrows in the tables indicate: \downarrow on augmenting, \uparrow on decreasing the temperature of the wire; t is the temperature of the wire in degrees Centigrade.

First and second Series of Experiments.

Under *a* the resistances observed are given (in Ohms) at the first heating till 360° C.; under *b* the same, after the wire having been cooled to 200° C. and then the heating being immediately repeated; under *c* the results, when

the wire, after being cooled to roomtemperature, had remained so during 24 hours and then was again heated up to 430° C.; finally under *d* the values obtained on cooling the wire immediately after the last heating. The irreversibility of the values observed is clearly demonstrated, as those under *d* are all *smaller* than sub *c*:

<i>t</i> :	<i>a</i> : ↓	<i>b</i> : ↓	<i>c</i> : ↓	<i>d</i> : ↓
250°	—	—	—	6.139
260	6.213	—	6.214	6.233
270	6.353	6.354	6.362	6.324
275	6.426	6.425	6.425	—
280	6.482	6.480	6.479	6.417
285	6.543	6.533	6.533	—
290	6.598	6.580	6.581	6.510
295	6.646	—	—	—
300	6.692	6.678	6.678	6.602
310	6.782	6.772	6.770	6.691
320	6.866	6.867	6.860	6.779
330	6.963	6.956	6.946	6.864
340	7.030	7.044	7.038	6.952
350	7.109	7.133	7.119	7.035
360	7.190	7.220	7.203	7.120
370	—	—	7.275	7.200
380	—	—	7.356	7.280
390	—	—	7.431	7.365
400	—	—	7.515	7.450

Third Series of Experiments.

Sub. *a*: resistances observed on heating the previous wire, sub *b*: the values observed on cooling immediately afterwards; interval: 300° — 500° C. and vice-versa.

<i>t</i> :	<i>a</i> : ↓	<i>b</i> : ↑	<i>t</i> :	<i>a</i> : ↓	<i>b</i> : ↑
300°	6.723	6.667	410°	7.621	7.544
310	6.814	6.759	420	7.690	7.616
320	6.902	6.842	430	7.758	7.688
330	6.990	6.924	440	7.824	7.758
340	7.076	7.007	450	7.893	7.828
350	7.160	7.086	460	7.962	7.900
360	7.244	7.167	470	8.031	7.969
370	7.321	7.244	480	8.103	8.042
380	7.400	7.320	490	8.176	8.118
390	7.476	7.396	500	8.245	8.190
400	7.548	7.471			

Also in this case the irreversibility is evident: on cooling all values again prove to be *smaller* than before at the same temperatures and the differences are more appreciable than in the previous series.

4th Series of Experiments. (Heatings as above : 450°—600° and vice-versa).					
$t:$	$a:$ ↓	$b:$ ↑	$t:$	$a:$ ↓	$b:$ ↑
450°	7.994	—	510°	8.392	7.975
460	8.060	—	515	—	8.012
470	8.128	—	520	8.457	8.055
480	8.193	—	525	—	8.098
490	8.259	—	530	8.522	8.137
500	8.324	—	540	8.586	8.199

The differences on heating and cooling still lie *in the same direction* as in the preceding cases, but now they are more appreciable than previously. Also the *initial* values (450°—500°) are noticeably greater than sub a as well as sub b of the 3rd series.

5th Series of Experiments. (Heating and Cooling as before; range 650°—805° C. and vice-versa).					
$t:$	$a:$ ↓	$b:$ ↑	$t:$	$a:$ ↓	$b:$ ↑
650°	8.926	9.302	750°	9.367	9.671
660	8.970	9.343	760	9.433	9.701
670	9.014	9.386	762.5	—	9.689
680	9.054	9.426	765	9.463	9.692
690	9.093	9.452	770	9.496	9.702
700	9.130	9.505	780	9.570	9.726
710	9.177	9.540	790	9.646	9.752
720	9.212	9.569	800	9.731	9.776
730	9.260	9.598	805	9.780	9.785
740	9.314	9.632			

The irreversibility in this interval is still more strongly expressed; but it is most remarkable that the values on cooling now are appreciably *greater* than those observed on heating the wire: the algebraic sign of the differences now proves to be *reversed*.

Sixth Series of Experiments.

In this series only the values of the resistances observed on heating (sub a) are given; those on cooling were, at all temperatures, so much

higher, that they could not be recorded on the same photographic plate. The differences thus lie in the same direction as in the previous case, but they are still very much greater. Range: 800° to 940° C. and vice-versa.

$t:$	$a:$ ↓	$b:$ ↑	$t:$	$a:$ ↓	$b:$ ↑
800°	10.130	$\begin{matrix} > 12\Omega \\ \text{Much higher than sub } a, \text{ but not measurable on the film.} \\ < 12\Omega \end{matrix}$	877.5	10.340 (min)	$\begin{matrix} > 12\Omega \\ \text{Much higher than sub } a, \text{ but not measurable on the film.} \\ < 12\Omega \end{matrix}$
810	10.176		880	10.343	
820	10.225		882.5	10.352	
830	10.277		885	10.368	
840	10.337		887.5	10.374	
850	10.393		890	10.409	
852.5	10.402		895	10.467	
855	10.410		900	10.548	
857.5	10.411 (max)		905	10.644	
860	10.404		910	10.764	
865	10.378		920	11.066	
870	10.353		930	11.408	
873.5	10.343		940	11.805	
875	10.340				

§ 3. All these data are graphically represented in Fig. 2 which gives a true image of the curious hysteresis-phenomena observed. Attention may be drawn to the ∞ -shaped part of the curve between 858° — 880° C., and the small but evident break at about 915° C., — which temperature practically coincides with the highest value ever observed for the transition-temperature: $\alpha\text{-Ti} \rightleftharpoons \beta\text{-Ti}$. The point, where the differences between heating and cooling change from positive to negative, corresponds to a temperature in the vicinity of about 640° C.

Of course, the specific resistances: $\varrho \cdot 10^4$ for a wire of 1000 mm length and 1 mm^2 diameter, can be obtained from all these numbers by multiplying them by 0,2108.

It is worth remarking here that the ∞ -shaped part in the neighbourhood of 880° C. proved gradually to get shorter and more compressed, being at the same time a little more shifted in the direction of 900° , when the evacuation of the furnace was continued for a very long time before the heating of the wire was repeated. As, however, the wire after heating at 950° C., — where R was more than 12Ω , — proves to get completely

split up and extremely brittle, it is almost impossible to repeat such measurements more often than once or twice.

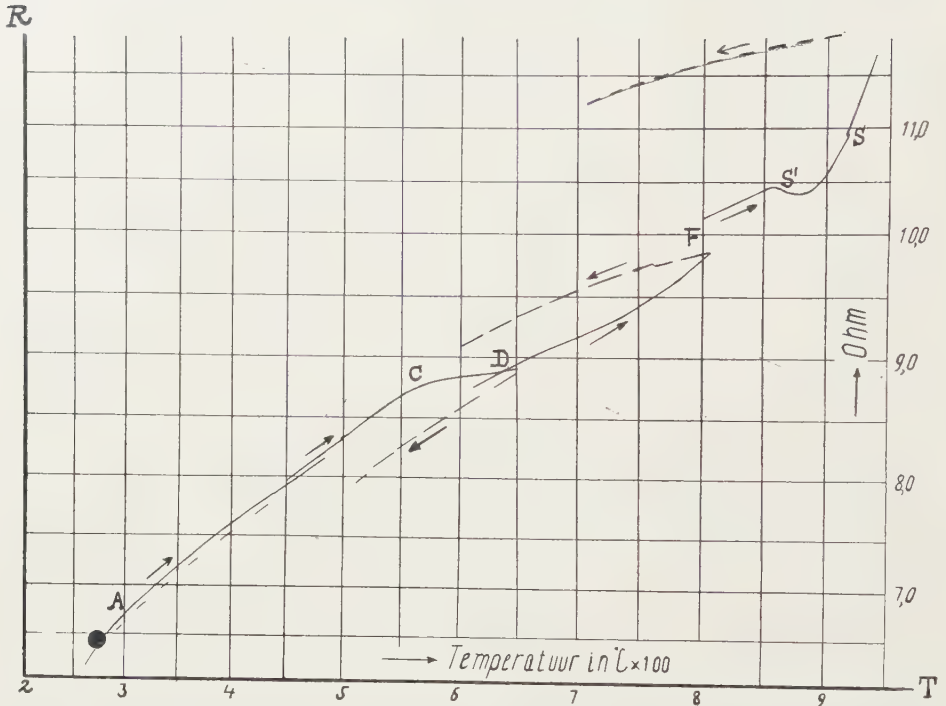


Fig. 2. *Electrical Resistance of Titanium on Heating and Cooling (Hysteresis-Effects).*
(Intervals: 270° — 480° ; 450° — 660° ; 620° — 810° ; 800° — 940° C.).

We also made the complete experiment in a single run (Fig. 3); of course, now the sensitivity of the galvanometer had to be much lowered, but, although this time the small discontinuities at the indicated temperatures

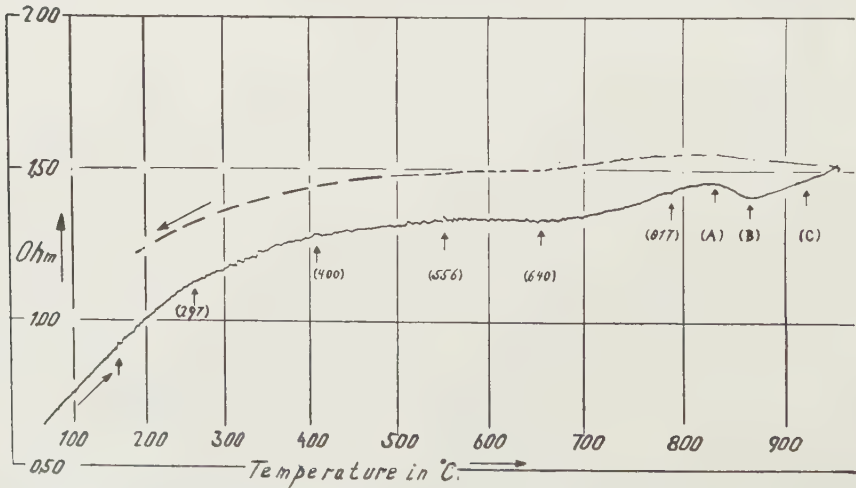


Fig. 3. *Electrical Resistance (Hysteresis) of Titanium in the vicinity of the Transition-point (A—C).*

are less conspicuous, the total aspect of the curve with its inflection-point in the vicinity of 600°C . and its transition-range between 640° and 860°C . clearly demonstrates its character as analogous to that of the atomic heats. The irreversibility on cooling is also clearly demonstrated on this film. Attention may be drawn, moreover, to the sinuous character of the curve, indicating the numerous sudden changes in the shape of the wire at successive moments during its continuous and gradual heating. Only the *reproducible* discontinuities always returning in successively repeated experiments are indicated by arrows.

§ 4. A more detailed insight into the particularities of the course of the hysteresis-phenomena and their relation to the minor "transition"-points was obtained in the following way. First a run was made from 0° to 320°C ., i.e. to about 20° above the minor transition-temperature at 297° — 300°C .: on heating, curve I in Fig. 4 was obtained; on cooling from 320°C . downwards, however, curve Ia which is situated *much* lower than I, but evidently meets it at about 150°C . Then a heating was made from 0° to 430°C ., i.e. to about 30° above the minor transition-point at 400°C .: on heating, again curve I was obtained with its characteristic change of direction at 297°C ., whilst on cooling the hysteresis-curve Ib was obtained, equally much lower than I, till at about 215°C . it intersects curve I and subsequently is situated *above* it. If, however, the heating be made from 0° to 475°C . in a *single* run, then first curve I is again followed, but on cooling now curve Ic is obtained which, just as in Fig. 2 lies *below* I, but at about 270°C . intersects curve I and then runs *above* it, whilst still showing the abrupt

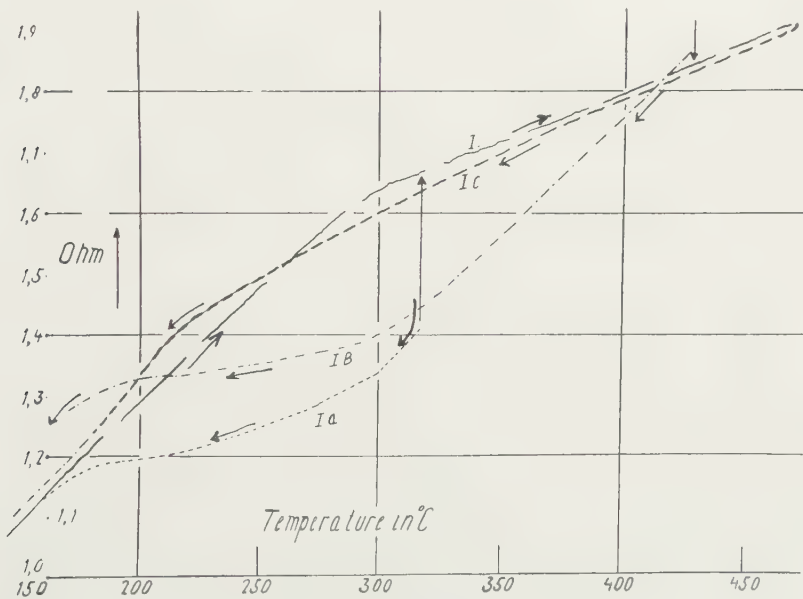


Fig. 4. Hysteresis-phenomena by Heatings from 0° — 320°C ., 0° — 430°C . and 0° — 475°C .

change of direction characteristic of I (at 297°C.), but shifted (by hysteresis) to about 215°C. From these results it clearly follows that the influence of the changes occurring at the successive "transition"-points remains always partially preserved at lower temperatures, being manifested by the particular course of the hysteresis-curve: most probably the inversion of its situation below or above curve I depends on the influence of the changes occurring in the metal at $255^{\circ}\text{--}272^{\circ}\text{C.}$ previously represented in Fig. 1.

Finally in Fig. 5 the curve for the resistance in its dependence on the temperature between 15° and 1000°C. , — as in Fig. 3, — is again represented, this time, however, composed of three different parts and with a greater sensitivity, therefore, of the recording galvanometer. This curve shows somewhat more details than the curve of Fig. 3, — especially the sharper discontinuity in the vicinity of the α -titanium \rightleftharpoons β -titanium-transition-point; — but for the rest, this curve, obtained with a different wire,

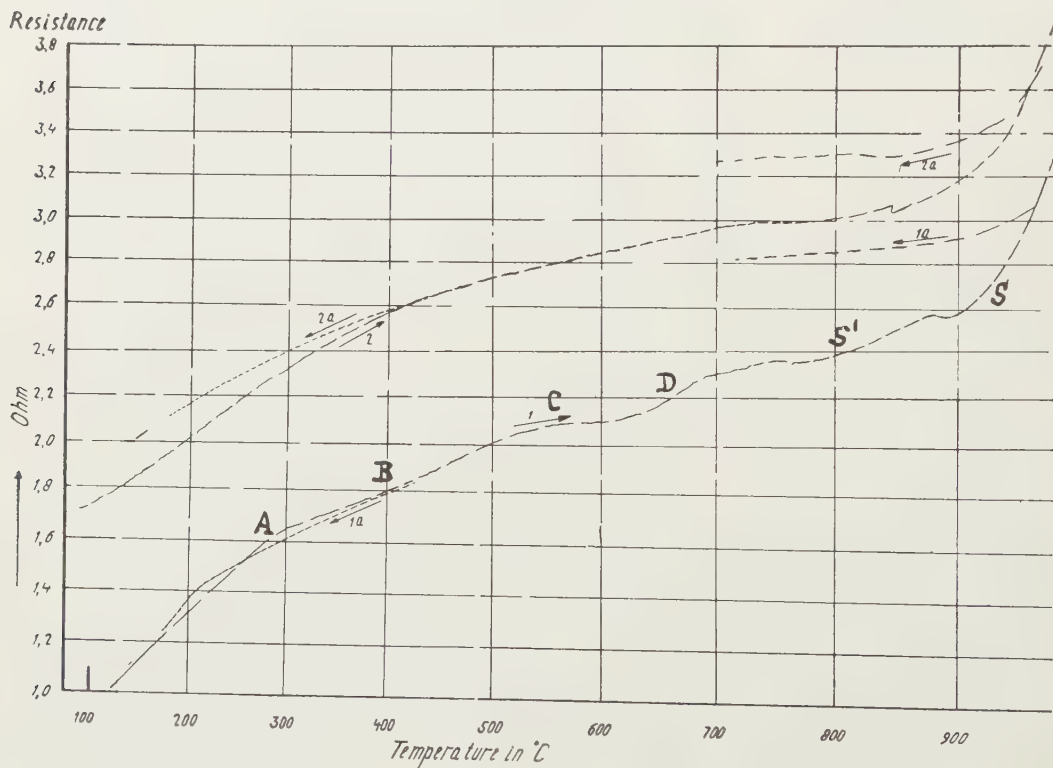


Fig. 5. Dependence of the Resistance on the Temperature.

evidently has preserved the same general character as that in the previous experiments. Curve I relates to the first heating: on cooling, the hysteresis-curve Ia lies under I and below 250° above I; the curves II and IIa relate to the second heating, after once the temperature had risen higher than 950°C. : now the hysteresis-curve is situated above the original one. At the

same time curve II proves to be shifted considerably upwards with respect to I, thus indicating the persistence of the changes of the wire, caused by the first heating above 950°C .

Fig. 6 shows the influence exerted on the shape of the resistance-temperature-curve, when for about half a minute some air is admitted and then rapidly again withdrawn. The wire now proved to be covered by a very thin, but this time, indeed, a *visible* film of the oxide; the retardation manifested itself, just as in the other cases, but the retardation-curve now is almost parallel to the heating-curve, both showing, however, a sharp discontinuity at about 540° and 640°C . respectively. There can be no

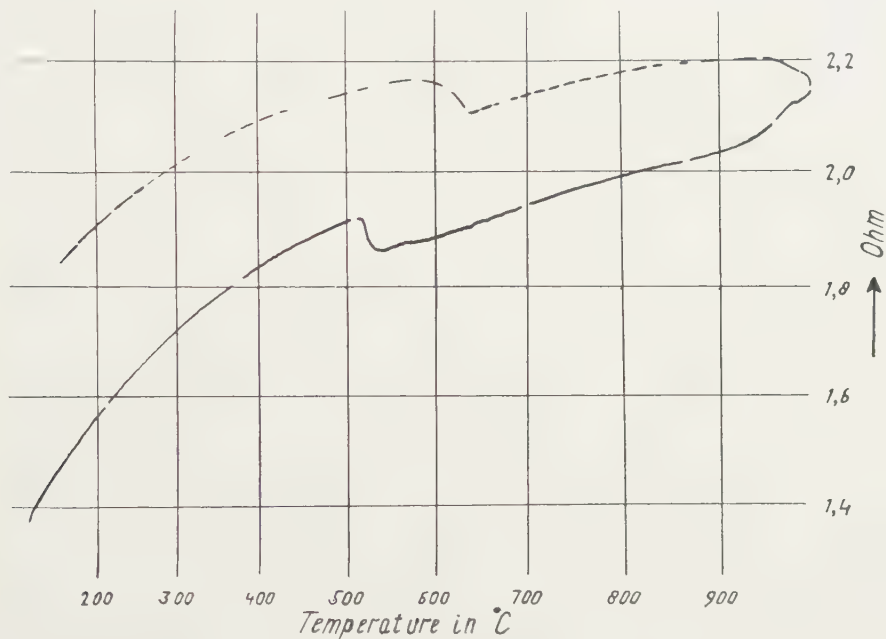


Fig. 6. *The Influence of Traces of Oxygen upon the Electrical Resistance of Titanium.*

doubt about the fact that the presence of oxygen or of oxides thoroughly changes the whole aspect of the curve and is, to some extent, responsible for the occurrence of at least some of these minor "transition"-points.

To this factor we will later-on return again more in detail, as the phenomenon clearly demonstrates that at least part of the effects observed are in some way connected with the presence of traces of *oxygen*, either in free or in combined form.

*Groningen, Laboratory for Inorganic and
Physical Chemistry of the University.*

Chemistry. — *The Exact Measurement of the Specific Heats of Metals at High Temperatures. XXIV. The Calorimetric, Electrical and Thermoelectrical Behaviour of Ductile Titanium. III.* By F. M. JAEGER, E. ROSENBOHM and R. FONTEYNE.

(Communicated at the meeting of March 28, 1936).

§ 1. By a suitable modification of the twin galvanometer method we finally were able to study the thermoelectrical force of ductile *titanium* with respect to pure *gold*; for the details of this method we here refer to the following paper by E. ROSENBOHM and F. M. JAEGER. In this paper we only communicate the results of these measurements and some of the conclusions to which the study of *titanium* in its calorimetric, electrical and thermoelectrical aspects finally led us.

For the measurement of the thermoelectrical force of *titanium* in combination with another metal as a function of the temperature, it first had to be decided *what* second metal had here to be chosen. *Platinum* was rejected for this purpose, because of its tendency to combine with *titanium*; finally our choice was fixed on *gold*. The latter metal, like platinum, does not show any transition-point at temperatures upwards to its melting-point (1063°C.). Moreover, a soldering of the junction of the two metals had to be avoided and so in *gold* we exactly found the metal which lent itself best to the technical execution of a solderless connection with *titanium*. This connection was made in the following way: a *gold*-wire with a diameter of about 0,4 mm was at its end molten into a sphere of about 3 mm thickness, which then was provided with a hole of 0,3 mm diameter, through which one end of the *titanium*-wire was drawn. This combination then was laid on a support provided with a slight depression and covered with a stamp, in which the form of the sphere and both wires were cut out. By carefully hammering, the two metals now were compressed so as to form a combination, which proved to be so tight, that it was impossible again to disconnect it; even at 1000°C. , this junction remained in a perfect condition, so that, even after several repeated experiments, no flaw whatsoever could be detected.

The wires of the thermocouple: *Ti—Au* and equally those of a thermocouple: *Pt—PtRh* were over a length of about 10 cm covered with narrow protecting capillaries and centrically fixed within a small porcelain crucible provided with a doubly perforated cover of porcelain; care must be taken, of course, that the two thermocouples could neither make contact with each other, nor with the crucible walls. The crucible in its turn then was surrounded by the thick copper block already mentioned in the case of the

determinations of the electrical resistance and fixed within the high-vacuum tube in about the same way as previously described.

§ 2. The results obtained in this way are collected in the following tables and are graphically represented by the reproduction in Fig. 1. As before, ↓ means: on heating; ↑ on cooling. In the series of experiments I and II the resistance of the first galvanometer + its external resistance was 1040 Ohm, the mean resistance of the thermocouple studied 5,4 Ohm at 360° C.; the range of heating was from 50° to 620° C., with a speed of about 3° pro minute. A *positive* value of E means, that at the hot junction the current is directed from the *gold*-wire towards the *titanium*-wire.

Series I and II.			
Temperature in °C.:	I E in Micro-V.:	II E in Micro-V.:	IIb E in Micro-V.:
50°	+310	+260	—
100	+540	+590	—
150	+720	+740	—
200	+790	+810 (M)	—
250	+800 (M)	+800	—
300	+770	+760	+900
350	+660	+640	+850
400	+480	+450	+730
450	+240	+220	+530
—	(break at 478°)	(break at 478°)	(break at 466°)
489	0	0	
500	—	—410	+160
522	—	—	0
600	—	—770	—520

The degree of reproducibility of the values of E , also after the wire had been heated to 620° C., may be judged from these numbers: at the second heating the maximum is somewhat shifted to the left.

If, however, the temperature once has risen *above* the transition-point, e.g. after heating to about 1000° C., — the values of E prove, even at lower temperatures, to have appreciably changed: at 50° C. $E = + 510$ M. V.; at 100° C.: + 1060 M. V.; at 150° C.: + 1480 M. V.; at 200° C.: + 1690 M.V.; etc.

In series III *a, b.* the range of temperatures was 600° to 1020° C. and vice-versa. Here the resistance of the first galvanometer + its external

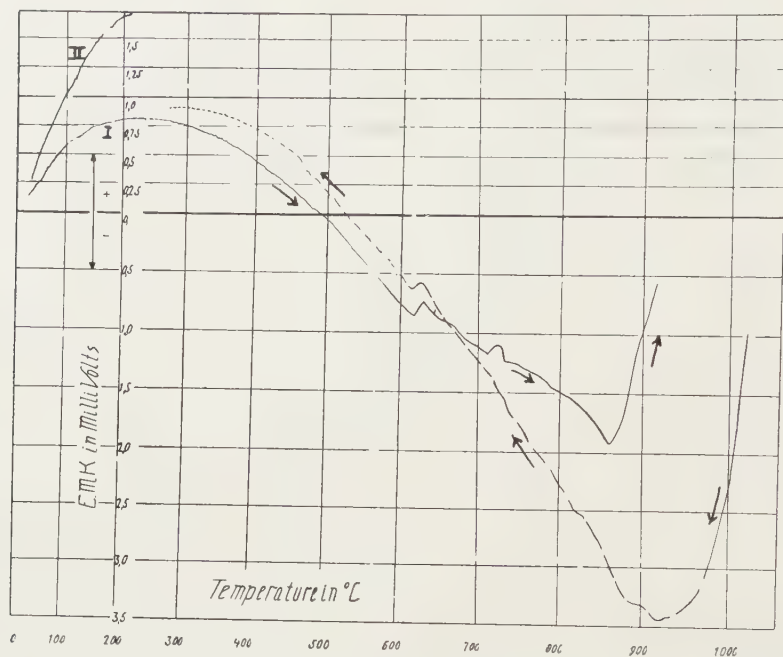


Fig. 1. Dependence of the Thermoelectrical Force Ti-Au on the Temperature.

resistance was 1540 Ohm, the mean resistance of the thermocouple studied: 6,5 Ohm, the mean speed of heating: $3^{\circ},6$ pro minute, whilst that of cooling had about the same value (minimal speed 3° , maximal about $5^{\circ},8$ pro minute).

From these numbers and Fig. 1 and 2 it may be seen that, on heating, the first rounded maximum is reached at about 250° C.; then E decreases with increasing temperature, becomes zero at the temperature of about 490° C. and then has *negative* values: at 620° C. a slight maximum follows and a second at about 720° C., till at about 860° C. a deep minimum is reached, followed by a *very steep rise* of the curve, most probably even to positive values of E . Most remarkable, however, is the enormous retardation-effect on cooling from the highest temperature downwards: the cooling-curve has its deeps minimum now at 924° C., so that the transition $\alpha \rightleftharpoons \beta$ -titanium manifests its influence over an *interval* of 860° — 924° C. Subsequently the negative hysteresis-effect becomes zero at about 670° C. and then gets a positive sign, still showing a slight discontinuity (maximum) at 620° C., but its curve now remains *above* the heating-curve even at the lower temperatures. In Fig. 1 the part of the curve to the right has been reduced to the same scale as the left part of the figure; in this way the small, insignificant irregularities of the original curve (Fig. 2) are omitted and

Series III.		
Temperature in °C.:	IIIa; <i>E</i> in Micro-V.:	IIIb: <i>E</i> in Micro-V.:
600°	— 760	—
625	— 830	—
630	— 780	—
650	— 880	— 820
670	— 980 (intersect.)	— 980
700	—1130	—1240
716	—1190 (break)	—
724	—1090 (ca) (M')	—
732	—	—1550 (break
750	—1250	—1790
800	—1500	—2320
825	—1630	—
850	—1850	—2820
860	* —1950 (m) ↓	—
870	—1880	—
900	—1050	—3230
910	— 720	
924	—	* —3320 (m)
950	—	—3270
975	—	—2950
1000	—	—2200
1020	—	— 850

smoothed out, with the exception of the two small maxima at 620° and 720° C. In this connection it is of interest to draw attention to the fact that in these thermoelectrical measurements there must be a much smaller dependency of the results on the presence of traces of gases than in the case of those concerning the electrical resistance, because the junction is not altered and the thermo-electrical force thus can hardly vary in any appreciable way. Notwithstanding this, the strong and curious hysteresis-phenomena are preserved, in a direction *opposite* to those observed in the measurements of the electrical resistance, but, for the rest, quite analogous to them.

§ 3. As to the real significance of the many phenomena observed, in the course of these investigations I—III, we became pretty certain *that at*

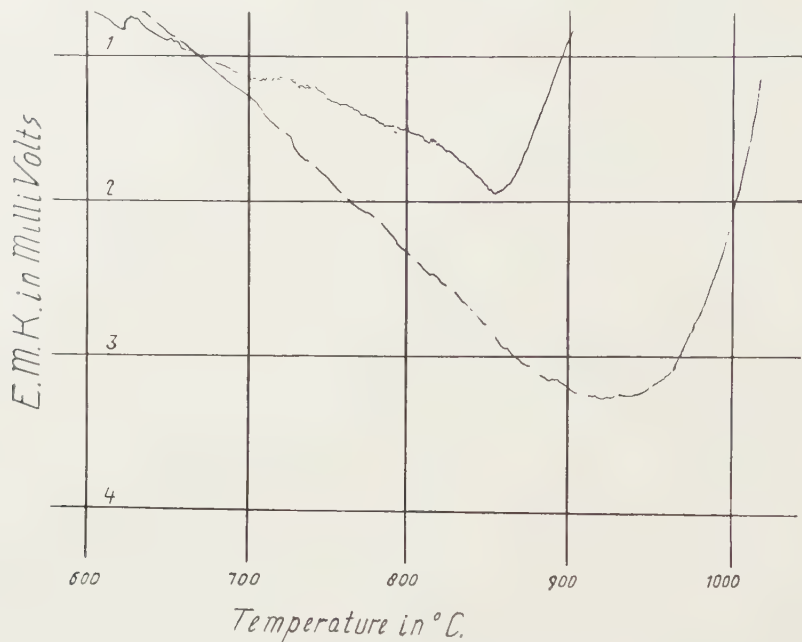


Fig. 2. Thermoelectrical Force of Titanium-Gold.

least there are two different causes of the retardation-phenomena observed, which are superimposed one upon the other. One of them surely is connected with the evident *tardiness of the reversible allotropic change $\alpha \rightleftharpoons \beta$ -titanium* at 882° — 905° C., — in the same way as we already stated these retardation-effects in a number of cases of this kind, more particularly with *beryllium, zirconium, cerium, chromium* etc. It seems pretty sure now that such allotropic changes, — although thermodynamically bound to a distinct “transition-temperature”, which indicates the temperature at which, under the prevailing pressure, the transformation is *completely finished* on heating from lower to higher temperatures, — already start at a temperature often appreciably *lower* than that thermodynamically defined transition-temperature and then only *gradually* proceed to completion. Thus a “transition-interval” precedes the “thermodynamical” equilibrium-point, most probably because of the fact that the different processes involved in the current of events (change of the fundamental grating and the necessary diffusion of the atoms into their new equilibrium-positions) ordinarily occur with very different velocities and thus become temporarily separated events¹⁾, — as recently has been emphasized by

¹⁾ F. M. JAEGER and E. ROSENBOHM, Rec. d. Trav. d. Chim. d. Pays-Bas, **53**, 930 (1934).

several authors¹⁾. Although the different metals showing allotropic changes behave very differently in this respect, — the transition-interval often being reduced to a practically negligible extent, as e.g. in the case of *ruthenium*²⁾, or being extended over a very long range of temperatures, as in the case of *zirconium* and *beryllium*, — this “intermediate phase” in all cases studied showed the general peculiarity: that its specific heats *very steeply increase with the temperature* until just before the thermodynamical transition-point, c_p reaching exceptionally high values and then equally steeply dropping to the value characteristic of the new stable modification.

This cause undoubtedly also plays a preponderant role in the present case of *titanium*, more particularly in the interval between 600° C. (inflection-point of the C_p — t -curve) and 905° C. But here the phenomena are, moreover, seriously complicated by another circumstance also previously met with, i.e. *the influence of extremely minute traces of absorbed gases*, more particularly of *oxygen* (and perhaps of *nitrogen*). The curious influence of traces of oxygen, more especially upon the temperature-coefficient of c_p of pure metals, has already been emphasized by us³⁾ on several occasions, e.g. with *silver*, *beryllium* and *zirconium*; an influence which appears to make itself felt *in no reasonable proportion to the almost untraceable amounts of the oxygen with respect to that of the metal present*.

From the weight and density of the *titanium* used in the vacuum crucibles and the volume of the latter, it can be calculated that in the calorimetrical experiments one atom of *oxygen*, by complete absorption by the metal, is present on about 300 millions of *titanium*-atoms; consequently it can hardly be assumed that real oxide-films will be produced⁴⁾. It is much more probable that the gas originally is condensed on the surface of the metal and, on heating, gradually penetrates into the metallic mass.

Now *titanium* has a very pronounced tendency to absorb oxygen and nitrogen; this tendency even is so strong that the metal is used in the steel- and in the copper-industry as a *desoxidant* or for the elimination of nitrogen in the former case. Moreover, it combines with oxygen to a whole series of oxides: TiO , Ti_3O_4 , Ti_2O_3 , Ti_3O_5 , TiO_2 , — the latter in 3 modifications, — which in the presence of metallic *titanium* in excess

¹⁾ Cf.: L. GRAF, Z. f. Metallk., **24**, 248 (1932); V. DEHLINGER, *Gitteraufbau Metallischer Systeme*, in *Handbuch der Metallphysik*, **1**, 1, 147—180 (1935); W. L. BRAGG and E. J. WILLIAMS, Proc. Royal Soc. London, A, **145**, 699 (1934); G. SACHS, Z. f. Metallk., **24**, 241 (1932); etc.

²⁾ F. M. JAEGER and E. ROSENBOHM, Rec. d. Trav. de Chim. d. Pays-Bas, **51**, 34 (1932); *ibid*, **53**, 461 (1934).

³⁾ F. M. JAEGER, E. ROSENBOHM and W. A. VEENSTRA, Proc. Royal Acad. Amsterdam, **36**, 291, 293, 297 (1933); F. M. JAEGER and E. ROSENBOHM, Rec. d. Trav. d. Chim. d. Pays-Bas, **53**, 460, 461 (1934); F. M. JAEGER and W. A. VEENSTRA, *ibid*, **924**, 925.

⁴⁾ In the vacuumtubes and in the ROENTGEN-camera, however, where the vacuum is practically the same as the pressure (0,001—0,0001 mm) of the pumps indicates, more oxygen is, of course, accumulated, — especially in experiments of long duration.

possibly seem to be partially reduced and converted in at least some of them at higher temperatures ¹⁾. Moreover ²⁾, of the three or four enantiotropic forms of TiO_2 the *transition-point* of $\alpha \rightleftharpoons \beta$ -anatase lies at 642° , that of *anatase* \rightleftharpoons *brookite* at about 840° , that of *brookite* \rightleftharpoons *rutile* between 900° and 1000° C. at a pressure of 1 atmosphere. That a *partial* reduction of TiO_2 by an excess of Ti under the very low oxygen-pressure (0,0002 mm) of our pumps at higher temperatures really takes place, is proved by the fact that, although feeble, the X-ray spectrum of TiO was observed. In this connection it is worth while once more to remark that, as TiO and TiO_2 thus *certainly* are both observed during the heatings, all other oxides mentioned *can* be supposed to be produced by the combination of these two: $Ti_2O_3 = TiO \cdot TiO_2$; $Ti_3O_4 = 2TiO \cdot TiO_2$; etc. On the other hand, the diagram reproduced in Fig. 6 of the former publication (II) convincingly demonstrates how an introduction of even a trace of air into the vacuum tube during half a minute, — in which experiments now a truly *visible* film of TiO_2 was generated, — really causes analogous retardation-effects to those observed, with breaks of the curve at 640° C. on heating and at 550° C. on cooling. Also the facts mentioned there that, on repeated heatings preceded by continuous pumping during a long time, the peculiar ∞ -shaped part of the resistance-temperature-curve ³⁾ in the vicinity of the transition-point (882° — 906°) seems to shrink to a gradually diminishing range and simultaneously shifts in the direction of higher temperatures, as well as the equally gradually diminishing effects at 300° , 400° , 554° C. etc. in the c_p - t -curve produced in the experiments with SALADIN's apparatus, as observed in successively repeated readings and also in the measurements of the electrical resistance, when the pumping off of traces of gas has beforehand uninterruptedly been continued, — all point in the same direction: i.e. in that of these discontinuities being intimately connected with the presence of almost imperceptible traces of oxides of different properties.

In this connection it can be remarked that, when once a trace of oxygen has been absorbed by the metal, it is quite impossible ever to withdraw it from the system by any experimental means at our disposal. By comparison with the equilibrium-pressure of the oxygen in the system: incandescent carbon, carbon monoxide, carbon dioxide and oxygen at 1000° C., it can easily be calculated that this oxygen-pressure in the equilibrium: *titanium*, *titanium-oxide(s)* and *oxygen*, must certainly be less than 10^{-19} or 10^{-20} atmospheres, i.e. about $3 \cdot 10^{-16}$ or $3 \cdot 10^{-17}$ mm of air. It is clear that the oxygen-pressure in our best vacuum pumps will always be many billions of times greater than these dissociation pressures, so that the possibility of an elimination of once absorbed oxygen is completely excluded.

¹⁾ M. BILLY, Ann. d. Chim. et Phys., 9, 16, 5 (1931).

²⁾ Cf.: P. PASCAL, Traité de Chimie Générale, 5, 573, 575 (1932).

³⁾ This curious retardation-effect is of the same kind as that stated by C. ZWIKKER (Physica, 6, 361 (1926)) some years ago in the case of pure *zirconium*, — which metal also intensively absorbs oxygen.

If this interpretation is right, then the temperatures at which the discontinuities, stated in the calorimetric curve, occur, should really correspond either to the polymorphic transition-points of the different modifications of TiO_2 or to the three- and four-phases-equilibria¹⁾ respectively of some of the possible oxides with Ti and O_2 or to both phenomena simultaneously.

*Groningen, Laboratory for Inorganic and
Physical Chemistry of the University.*

¹⁾ M. BILLY, Ann. d. Chim. et Phys., (9), 16, 5 (1921).

Chemistry. — *The Determination of the Thermoelectrical Force of Metals in a Vacuum by means of the Photographically recording Double Galvanometer.* By E. ROSENBOHM and F. M. JAEGER.

(Communicated at the meeting of March 28, 1936).

§ 1. In continuation of our investigations¹⁾ on the applicability of SALADIN—LE CHATELIER's twin galvanometer with photographic recording for different kinds of measurements, we wish in this paper to describe its use for the determination of the thermoelectrical behaviour of metal-wires at varied temperatures with respect to a standard-metal. As also in this case the measurements had to be made in a high vacuum, a suitable furnace-tube for this purpose had to be constructed which, its gas-tight mantle being eliminated, is represented in Fig. 1. Its construction is in many respects analogous to that of the furnace-tubes previously described; however with the difference, that not only the wires of the two thermocouples used in the temperature-measurement, but also those of the thermocouple consisting of the metal to be investigated and of the standard-metal had, under perfect isolation, to be passed through the water-cooled cover.

The wires of these thermocouples were, over a length of 45 cm, covered with narrow, protecting capillaries and the hot junctions centrically fixed within a small porcelain crucible provided with a doubly perforated porcelain cover, which crucible in its turn was surrounded by a cylindrical copper-block to ascertain a homogeneous temperature, just as was described in the case of the measurement of the electrical resistance. Care must, of course, be taken that the two thermocouples could neither make contact with each other, nor with the crucible walls. In Fig. 2, which represents the bottom part of the tube on a larger scale, the copper mantle, with the porcelain

¹⁾ E. ROSENBOHM and F. M. JAEGER, Proc. Royal Acad. Amsterdam, 39, 366, 374 (1936).

crucible intentionally made to emerge somewhat from it, can clearly be seen to the right, whilst to the left the collapsed covers, some diaphragms and the protecting capillaries are shown. The junction of the second $Pt-PtRh$ -thermoelement used for the temperature-indication originally was

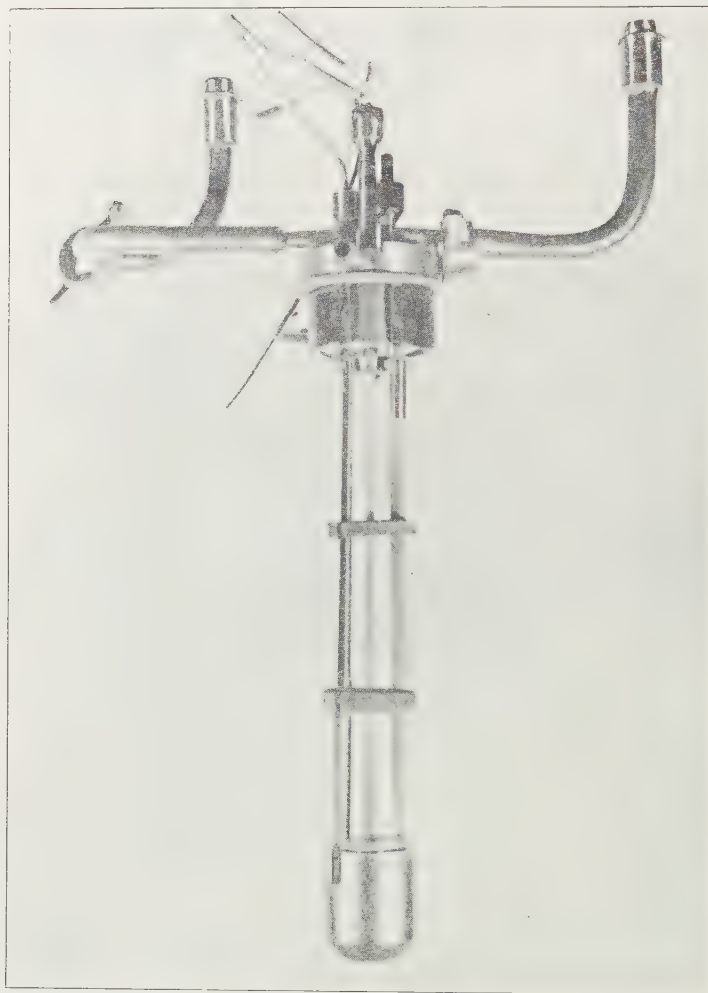


Fig. 1. Dismantled Vacuum-Tube for the Determination of the Thermoelectrical Force $Ti-Au$ at different Temperatures.

brought into contact with the wall of the copper mantle, but later-on freely placed next to the other junction; its temperature was read by means of a suitable and accurate pyrometer. All six wires were carefully isolated and the different wires led to the junctions in the ice-box, the connections of which were linked to the galvanometers; those of the thermocouple to be investigated being connected with the vertically, those of the $Pt-PtRh$ -thermocouple with the horizontally recording galvanometer.

§ 2. *Calibration of the Photographic Plate.* Because the sensitivity of the vertically recording galvanometer was great enough to indicate a



Fig. 2. The Bottom-end of the Vacuum-tube with Porcelain Crucible, Covers and Diaphragms.

thermoelectrical force of some Microvolts by a deviation already covering the whole 13 cm of the height of the photographic plate, while the thermoelectrical forces to be measured in an interval of 200° proved to be about a thousand times greater, — the sensitivity of the first galvanometer had to be sufficiently diminished by inserting a suitable external resistance of the order of 1000 to 1500 Ohms. For the necessary preservation of the aperiodicity of the instrument, a suitable shunt was used.

The calibration-marks for the vertical coordination-axis on the photographic plate now were applied in the following way:

An auxiliary current i , which over a known resistance of r Ohms had a definite voltage of e Millivolts, was applied to the galvanometer plus its external resistance. If the total resistance of the instrument, i.e. the sum of the really active galvanometer-resistance plus the external resistance inserted, is w , — then the potential difference e between the two galvanometer-junctions will be:
$$e = i \cdot \frac{r \cdot w}{r + w}.$$
 During the measurements, the resistance R_t of the thermocouple to be investigated, — which resistance is dependent on the temperature of observation, — plays the role of the resistance r in the said formula. As the external resistance applied is very great (about 1000 Ohms), R_t need not be known with a greater accuracy than about 0,1 Ohm. Therefore, if E be the real electromotive force of the thermocouple to be measured, R_t its resistance at each temperature of t° ,

then the true potential difference E' of the thermocouple is calculated from:

$E' = E \cdot \frac{w}{w + R_t}$, so that evidently the correction to be applied is only very small¹⁾. The exactness of the determination of E is dependent on the choice of the abscissae, i.e. of the temperature-interval considered.

§ 3. The Measurement of the Thermoelectrical Force of Iron against Copper at Different Temperatures.

For these measurements we used a wire of purest electrolytically prepared iron; the wire had a length of 90 cm, a diameter of 0,3 mm and a specific resistance: $10^4 \cdot \rho$ of 0,0984 Ohm at 20° C.

1st Series of Measurements.			
Temperature t in °C.:	Thermoelectrical Force $Fe-Cu$ in Microvolts:	Temperature t in °C.:	Thermoelectrical Force $Fe-Cu$ in Microvolts:
200°	+1656	720°	-1259
250	+1815	730	-1336
300	+1869	740	-1424
350	+1795	750	-1485
400	+1583	760	-1548
450	+1295	800	-1797
500	+ 870	850	-2086
520	+ 673	890	-2322
530	+ 578	900	-2378
540	+ 454	904	-2400
550	+ 361	908	-2448
600	- 119	910	-2493
650	- 619	950	-3104
710	-1182		

In the beginning the thermoelectrical force is *positive* and it approximately increases in a linear way with the temperature, till a rounded maximum at about 300° C. is reached; then a slight discontinuity at 540° C. follows and at 586° C. it becomes *zero*. At still higher temperatures it becomes *negative*: the transition $\alpha-Fe \rightleftharpoons \beta-Fe$ is indicated by an indistinct discontinuity at 740° C. (A_2); but the transition: $\beta-Fe \rightleftharpoons \gamma-Fe$, where a real change of

¹⁾ In the case of the thermocouple: $Fe-Cu$, at 700° C. we found: $w = 840$ Ohms, $R = 3,6$ Ohms; so that at 700° C. $E = E' \times 1,0043$. At 900° C. $E = E' \times 1,0053$; etc.

the structure takes place, manifests itself by a *very sharp* discontinuity at 906°C. (A_3).

§ 4. For a better insight into the prevailing relations, the part of the curve between 700°C. and 950°C. was studied by measurements on heating and on cooling, in combination with those of the electrical resistance of iron (Fig. 3); the curve for the electromotive force thus obtained is represented in Fig. 4.

In Fig. 3 two curves are represented which at increasing temperatures approach each other ever more closely: the numbers of the table are the *intermediate* values of the two, all values being corrected in the usual way. The following remarks may elucidate the meaning of the two different curves represented.

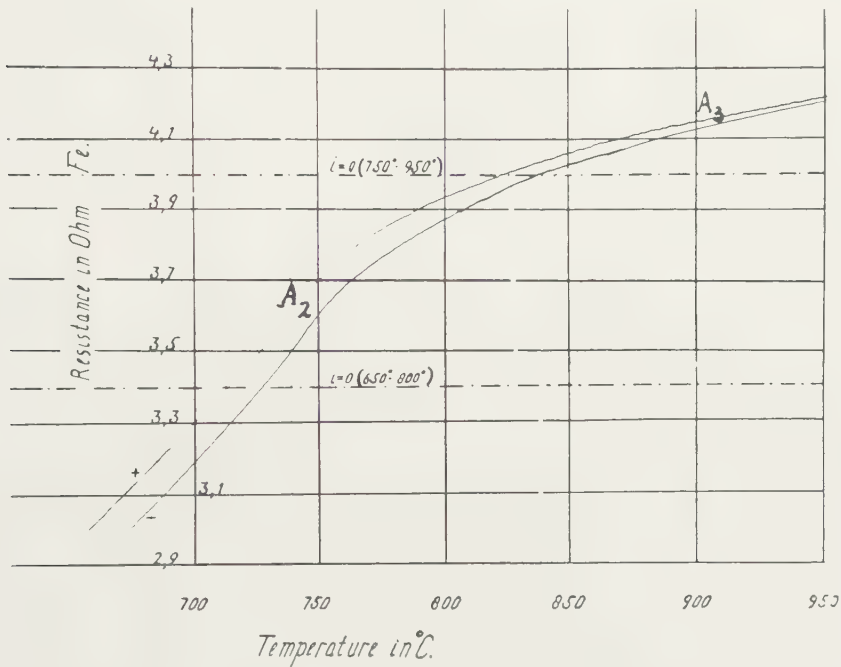


Fig. 3. Electrical Resistance of Iron.

On measuring the resistance of the *iron-wire* on heating, a systematic shift of the zeropoint of the recording galvanometer was observed, if the auxiliary current in the WHEATSTONE-bridge was switched off. For the purpose of eliminating a possible induction by the direct furnace-current on the *iron-wire*, the latter now was wound in a bifilar way; but even in this case, the shift of the zero-point proved still to be present. Moreover, this shift even remained present, when the heating current was completely switched off. The other possibility: the presence of a thermoelectrical force as the cause of this effect, had also to be rejected, as the magnitude of the shift observed proved to be independent of the rate of heating and also independent of the

fact whether the connections $Fe-Cu$ were situated on the same level of the tube or on levels differing more than 3 cm from each other. The shift

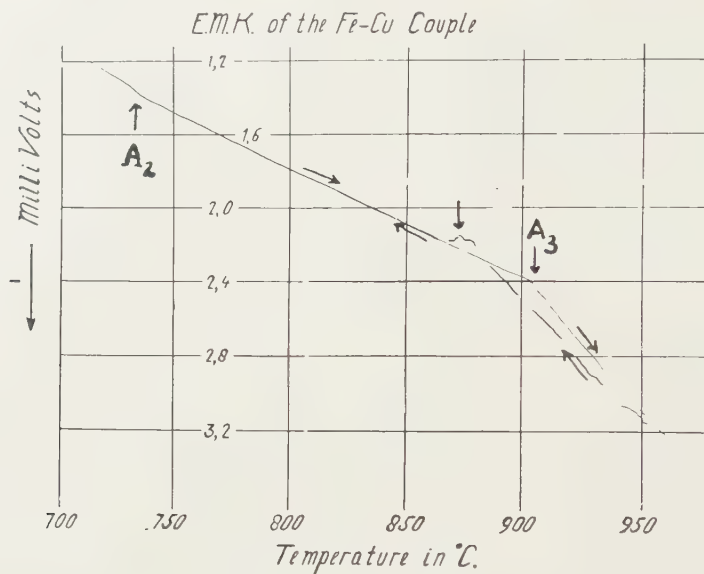


Fig. 4. The Thermoelectrical Force of $Fe-Cu$.

observed also proved to be independent of the substitution of the *iron-wire* by another of the same length. Finally it proved *solely to depend on the temperature of the iron-wire itself*, reaching a maximum value at about $550^{\circ} C.$ and then regularly decreasing with increasing temperatures. The algebraic sign of the effect was *reversed*, when the junctions of the supplying wires in the bridge were *interchanged*; as the latter phenomenon proved to be completely reproducible, the exact values could be determined by consecutively observing *two curves within the same interval of temperatures*, but in both cases after having interchanged the said connections in the bridge: the one curve then certainly is *too high*, the other *too low*. In Fig. 3 the two curves are represented: the first part of both relates to an interval of temperature ranging from 670° to $800^{\circ} C.$, the second from 750° to $950^{\circ} C.$, so that they overlap a range of 50° . The two parts were photographed on two successive days; notwithstanding this, they proved to fit completely together, showing that no change in the shift had occurred. The phenomenon, although quite reproducible, can not yet be explained at this moment.

From the numbers for the resistances in the table it may be deduced that the temperature-coefficient of the resistance rapidly increases in the neighbourhood of A_2 , reaches its maximum at about $750^{\circ} C.$ and then very rapidly decreases at higher temperatures. The second transition-point A_3 , however, is only indicated here by the fact that the temperature-coefficient of the resistance of the *iron-wire* becomes practically *constant* from $900^{\circ} C.$ upwards. This result is in fairly good agreement with the

Resistance of Iron between 670° and 950° C. (Length of the wire: 25 cm.)					
Temperature t in °C.:	Resistance in Ohms:	Increments $w_t - w_{t-10}$	Temperature t in °C.:	Resistance in Ohms:	Increments $w_t - w_{t-10}$
670°	3.012		810°	3.912	0.034
680	3.077	0.065	820	3.939	0.027
690	3.147	0.070	830	3.965	0.026
700	3.221	0.074	840	3.990	0.025
710	3.296	0.075	850	4.014	0.024
720	3.372	0.076	860	4.037	0.023
730	3.453	0.081	870	4.059	0.022
740	3.539	0.086	880	4.079	0.020
750	3.627	0.088	890	4.097	0.018
760	3.702	0.075	900	4.113	0.016
770	3.753	0.051	910	4.127	0.014
780	3.799	0.046	920	4.142	0.015
790	3.840	0.041	930	4.157	0.015
800	3.878	0.038	940	4.171	0.014
			950	4.185	0.014

data published by BURGESS and KELLBERG¹⁾; the small discontinuity at 900° C. indicated by them could, however, not be established by us with absolute certainty.

As to Fig. 4, we can draw attention to the fact that the general course of this curve for the electromotive force: $Fe-Cu$ is in fair agreement with that of the curve represented by MELLOR²⁾, as deduced from the measurements of BELLOC³⁾. In our figure the posterior part of the curve is *double*, because on cooling a most remarkable *hysteresis-effect* presented itself with respect to the transition: $\beta-Fe \rightleftharpoons \gamma-Fe$: on cooling (broken curve) the transformation $\gamma-Fe \rightarrow \beta-Fe$ evidently is strongly retarded till 865° C., at which temperature the discontinuity there occurring suddenly jumps back to the original heating-curve of the β -modification and, on further cooling, this curve is then completely followed in all details. Besides this very remarkable fact of a kind of "undercooling" at a transition-point, manifesting

¹⁾ G. K. BURGESS and J. N. KELLBERG, Journ. Wash. Acad. **4**, 436 (1914).

²⁾ J. W. MELLOR, *Inorg. and Theor. Chemistry*, **13**, 230, fig. 278 (1934).

³⁾ G. BELLOC, Bull. Soc. Encour. Nat. Ind., **107**, 492 (1908).

itself in the value of an electromotive force, — a comparison of the Figs. 3 and 4, moreover, teaches us that, whereas in Fig. 3 the transition-point A_2 appears by the change in resistance much more sharply indicated than that at A_3 , in Fig. 4 the *reversed* phenomenon manifests itself with respect to the change of the thermoelectrical force at A_2 and A_3 . This difference is very remarkable indeed, as the transformation at A_2 is considered not to be accompanied by a sudden change of the structure, but to correspond solely to the sudden change in the magnetic properties of the metal.

§ 5. *The Thermoelectrical Force of Nickel with respect to Copper.* Because between 300° and 400° C. *nickel* shows a transition-point which in many respects is analogous to the point A_2 of *iron*, we also studied the thermoelectrical behaviour of a *nickel-copper*-thermocouple within the said range of temperatures.

Measurements of the Thermoelectrical Force: <i>Ni—Cu</i> between 300° and 400° C.	
Temperature t in $^\circ\text{C}.$:	Electromotive Force in Microvolts:
310°	+7753
320	+7966
330	+8200
340	+8416
342	+8450
343	+8573
350	+8722
360	+8975
370	+9194
380	+9437
390	+9642

The thermoelectrical force is here positive between 300° and 400° C. A small discontinuity (Fig. 5) manifests itself also in this case at about 343° C., but the character of the curve does not change appreciably at higher temperatures. This is in contrast with the behaviour of the resistance-temperature-curve previously obtained with a wire of somewhat less pure *nickel*¹⁾, where an inflection-point occurs in the neighbourhood of the transition-point and where, after surpassing this point, the resistance drops

¹⁾ Proc. Royal Acad. Amsterdam, **39**, 380 (1936).

to less than half its previous value. In the vicinity of their CURIE-points, *nickel* and *iron* evidently behave in a quite analogous manner with respect

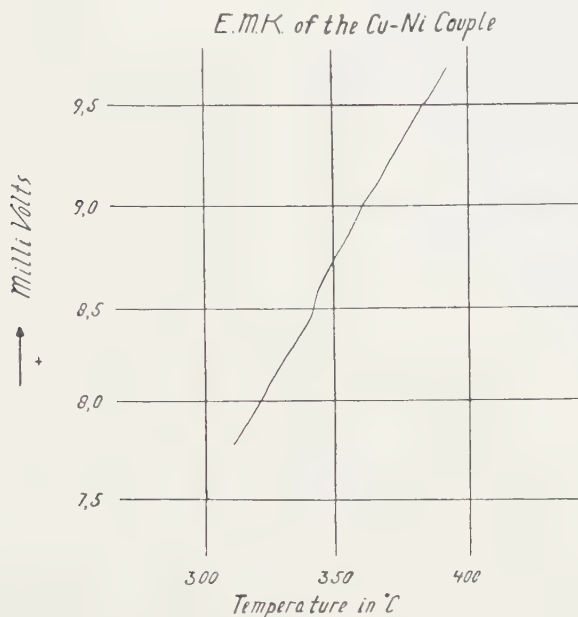


Fig. 5. Thermoelectrical Force: Ni—Cu.

to their electrical resistances, as well as to their thermoelectrical properties towards *copper*.

*Groningen, Laboratory for Inorganic and
Physical Chemistry of the University.*

Physics. — *The most general photographic density-law.* By A. VAN KREVELD and L. S. ORNSTEIN, Utrecht. (Communication of the Dutch Foundation for photographic and cinematographic research).

(Communicated at the meeting of March 28, 1936).

I. Introduction.

A photographic density-law is a relation between the intensity I of the light which falls on the photographic plate, the time of exposure t and the effect Z , caused by the exposure. Z may be either the developed density or the number of developed grains or any other measure for the photographic effect.

The following considerations are limited to the most important case

of exposures without intermittency effects. Then the general relation between I , t and Z can be written as follows:

$$\varphi(I, t, Z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

The first attempt to estimate this relation was that of BUNSEN and ROSCOE⁽¹⁾, who formulated the so-called reciprocity law:

$$\varphi(I \times t, Z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

According to this relation Z is a function of the product $I \times t$ (= the energy) only.

SCHWARZSCHILD⁽²⁾ formulated the following law, which fitted his observations more exactly:

$$\varphi(I \times t^p, Z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

p being a constant of the emulsion, the so-called SCHWARZSCHILD-exponent. But neither law could be confirmed by later investigators; p appeared to be a function of I and t . Therefore, the relation (3) is merely the general relation (1), p being equal to

$$-\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right)_Z \times \frac{t}{I}. \quad (\text{See } (3)).$$

Besides (2) and (3) a number of other relations have been formulated in the course of time, most of them being purely empirical and containing several arbitrary constants. A well-known example is KRON's law:

$$\varphi(I \times t \times \sqrt{(\log I + a)^2 + 1}, Z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

which also failed to be confirmed in general⁽⁴⁾.

In the last few years, however, some papers have been published, in which the relation (1) is compared for different wave-lengths and this comparison has led to some more fundamental relations, which, however, are less concrete than (2), (3) and (4).

II. *The three fundamental relations.*

Let λ be the wavelength, and let us denote the intensity of a monochromatic radiation of wavelength λ_i by I_i . Further let us denote the intensity of a non-monochromatic radiation by I_M .

If the mixture in question consists of the monochromatic radiations $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_k$ we may write:

$$I_M = {}_1I_M + {}_2I_M + \dots + {}_iI_M + \dots + {}_nI_M = \sum_i I_M$$

${}_iI_M$ being the intensity (in the mixture) of the monochromatic component λ_i .

Then the following three relations hold for the range of normal exposures:

$$\log I_i - \log I_k = f_{ik}(Z) \quad \text{. (I)}$$

$$\sum_i \frac{I_M}{I_i} = 1 \quad \text{. (II)}$$

$$\log I_i = g_{ik}(t) \times \log I_k + h_{ik}(t) \quad \text{. (III)}$$

The relations I and II were discovered simultaneously. Relation I is the mathematical description of the fact (obtained by WEBB ⁽⁵⁾, and more generally deduced by VAN KREVELD ⁽³⁾) that the failure of the reciprocity law is equal for all wavelengths.

Relation II (obtained by VAN KREVELD ⁽³⁾, ⁽⁶⁾, see also WEBB ⁽⁷⁾) is the photographic addition-law, which permits the computation of the density-curve of a mixed colour from the density-curves of its components.

Relation III (obtained by WEBB ⁽⁷⁾) means that the logarithmic density-curves of different wavelengths with the same time of exposure have a linear relation to one another.

III. *Mathematical considerations.*

For the general case that $g_{ik} \equiv 1$ (for $g_{ik} \equiv 1$; see conclusion d) we may resolve $\log I_i$ from I and III:

$$\log I_i = \frac{h_{ik} - g_{ik} \times f_{ik}}{1 - g_{ik}} \quad \text{. (5)}$$

We define:

$$\frac{h_{ik}}{1 - g_{ik}} = H_{ik}(t)$$

$$\frac{g_{ik}}{1 - g_{ik}} \equiv G_{ik}(t)$$

so that:

$$\log I_i = H_{ik}(t) - G_{ik}(t) \times f_{ik}(Z) \quad \text{. (6)}$$

If we consider the relations I and III for another pair of colours e.g. λ_i and λ_l , we find in the same way:

$$\log I_l = H_{il}(t) - G_{il}(t) \times f_{il}(Z) \quad \text{. (7)}$$

From the comparison of (6) and (7) we conclude:

$$H_{ik} - G_{ik} \times f_{ik} \equiv H_{il} - G_{il} \times f_{il} \quad \text{. (8)}$$

So the expression which is found for $\log I$ does not depend on the second index and we may write:

$$\log I_i = H_i(t) - G_i(t) \times f_i(Z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

From I we know that $f_{ik} \equiv -f_{ki}$;

From (6) and (9) we know: $f_i \equiv c_{ik} \times f_{ik}$.

Hence:

$$f_i \equiv c_{ik} f_{ik} \equiv -c_{ik} f_{ki} \equiv -\frac{c_{ik}}{c_{ki}} f_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

c_{ik} and c_{ki} being constants.

From (10) we learn that: $f_i(Z) \equiv c_i \times F(Z)$.

$F(Z)$ being independent of the wavelength. Thus we find from (9):

$$\log I_i = H_i - G_i \times c_i \times F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

In the same way:

$$\log I_k = H_k - G_k \times c_k \times F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

We subtract (12) from (11) and get:

$$\log I_i - \log I_k = H_i(t) - H_k(t) + \{G_k(t) \times c_k - G_i(t) \times c_i\} \times F(z) \quad . \quad (13)$$

If we compare (13) with I we find:

$$H_i(t) \equiv H_k(t) + d_{ik} \equiv H(t) + d_i$$

$$G_i(t) \times c_i \equiv G_k(t) \times c_k + e_{ik} \equiv G(t) + e_i$$

so that finally we get following relation (replacing i by λ):

$$\underline{\log I_\lambda = H(t) + \{G(t) + e_\lambda\} F(Z) + d_\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IV)$$

IV. Conclusions.

a. Relation IV is deduced from I, II and III purely mathematically: so it describes the observations without any hypothesis.

b. Only the two constants e_λ and d_λ are dependent on the wavelength. So the functions H , G and F are characteristic of the emulsion.

c. Relation IV can also be written in a non-logarithmic form:

$$I_\lambda = \delta_\lambda \times \vartheta(t) \times \varphi(Z)^{G(t) + e_\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IVa)$$

If we substitute this expression in relation II we get a more general addition-law:

$$\sum_i \frac{I_M}{\delta_i \times \varphi(Z)^{e_i}} = \vartheta(t) \times \varphi(Z)^{G(t)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IIa)$$

SCHWARZSCHILD's law (3) implies:

$$H(t) = -p \log t; \quad G(t) = 0.$$

KRON's law (14) is not consistent with relation IV. At all events it is clear that $G(t)$ will be small and merely a correction-term.

V. *The most general density-law.*

We shall now consider monochromatic radiations only and emulsions for which $g_{ik} \neq 1$.

Then the general relation IV holds:

$$\log I_\lambda = H(t) + \{G(t) + e_\lambda\} F(Z) + d_\lambda$$

We may ask now after the meaning of the individual terms of this expression.

The most simple term is d_λ . It has the dimensions of $\log I$ and is a wavelength-function which indicates the colour sensitivity of the emulsion. By choosing individual measures for the intensities of each wavelength, it may be cancelled.

The only function in IV which contains the photographic effect Z is F . It may be considered as the inverse of the logarithmic density-curve $Z = \varphi(\log I)$. The explicit form of the function F is not essentially important, as it can be altered arbitrarily by changing the measure of the photographic effect Z (e.g. density or opacity or number of developed grains or weight of the developed silver, etc.).

The wavelength-function e_λ is more important. It indicates how the steepness of the logarithmic density-curve depends on the wavelength and is independent of Z and t . On the other hand it is known that the wavelength-dependence of the steepness is caused by a combination of three essentially independent factors ⁽⁹⁾, so that we cannot expect a simple analytic form for the function e_λ .

Now only the functions $H(t)$ and $G(t)$ remain. They depend neither on the wavelength nor on the density and must have a fundamental meaning. It is possible and even probable that they have a simple analytic form and further there is a possibility that they are independent of the individual photographic emulsion, that means that they are characteristic of the photographic process in general. The experimental data known to us, however, do not permit more concrete conclusions to be drawn.

For practical purposes we can plot $\log I$ against $\log t$ (at constant density) and obtain a set of curves $\log I = R(\log t)$ with Z as parameter. Such sets have been published by several authors ⁽¹⁰⁾. Now relation IV expresses that such a set must be a linear set, which means that all specimens of the set may be expressed as linear combinations of two of them. Hence:

$$R(\log t) = a R_1(\log t) + (1-a) R_2(\log t) \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

We tested this relation by the very extensive data of JONES, HUSE and HALL⁽¹⁰⁾. They had investigated four different emulsions in a range of intensity of about $1:10^7$. From their tables 5—8 the $\log I$ — $\log t$ -curves can be easily calculated. The result of our test of relation (18) is:

Emulsion	Range of densities considered in our calculation	Maximum deviation from relation (18) in % of intensity
W. and W. panchromatic .	0.6—2.8	40%
Eastman Orthochromatic .	0.4—2.8	40%
Eastman Slow lantern .	0.2—3.0	130%
Process	0.2—2.8	70%

The numbers given in this table are the maximum deviations; the mean deviations are much smaller, so that we may say that relation (18) is fitted rigidly by the data of JONES, HUSE and HALL, while their own catenary-formula shows deviations up to a factor 10. We must acknowledge, however, that our relation (18) is not such an explicit form as the catenary-formula, so that it can be satisfied more easily. Further JONES, HUSE and HALL exposed with white light, while relation (18) was proved only for monochromatic light.

We also examined the data of ARENS and EGGERT⁽¹⁰⁾. The general form of their sets of curves agrees with the supposition of a linear set (18) but, as the numerical data are not given, we could not make an exact comparison.

If we now consider the practical influence of the wavelength, relation IV expresses that *the linear set (18) must be the same for all wavelengths*.

A change of the wavelength only causes a shift of the individual curves of the set towards one another in the $\log I$ -direction.

* *

In conclusion we may say that, if the functions $H(t)$ and $G(t)$ are known explicitly, then *relation IV (or IVa) is the most general density-law for monochromatic radiations and IIa (or IIb) is the most general density-law for arbitrary radiations*.

All known laws (namely I, II and III) and all laws yet to be formulated must follow from IIa (or IIb) by specialization. In this way we have obtained the photographic analogon of the fundamental laws of thermodynamics, which indeed imply all special laws.

Finally we wish to make a remark about the function $F(Z)$. We already pointed out that this function has no fundamental meaning, on account of the latitude possible in choosing a measure for the photographic effect.

If it were possible, however, to choose a measure of fundamental significance — and this can only be the amount of silver of the latent image $F(Z)$ would obtain a physical meaning. So the methods EGGERT and NODDACK ⁽¹⁾, which determine the amount of silver formed directly by the action of light, are important in this connection. The difficulty is that these methods can only be applied to exposures in the range of solarization, so that they are of no use for our problem, which refers to the range of normal exposures.

LITERATURE.

1. R. W. BUNSEN and N. E. ROSCOE, Pogg. Ann. **96**, 373 (1855), cited according to Hay, Handb. der Phot. V.
2. K. SCHWARZSCHILD, Phot. Korr. **36**, 171 (1899).
3. A. VAN KREVELD, Dissertatie. Utrecht, 67 (1933).
4. G. EBERHARD, Handbuch der Astrophysik, Band II, 2. Hälfte, zweiter Teil, 447 (1931).
5. J. H. WEBB, J. O. S. A. **23**, 317 (1933).
6. A. VAN KREVELD, Physica, **1**, 60 (1933).
A. VAN KREVELD, Zeitschrift Wiss. Phot. **32**, 222 (1934).
7. J. H. WEBB, J. O. S. A. **26**, 12 (1936).
8. A. VAN KREVELD, Physica, **1**, 67 (1933).
9. A. VAN KREVELD, Photographic Journal, **74**, 377 (1934).
10. L. A. JONES and E. HUSE, J. O. S. A. **7**, 1079 (1923); **11**, 319 (1925).
L. A. JONES, E. HUSE and V. C. HALL, J. O. S. A. **12**, 321 (1926).
H. ARENS and J. EGGERT, Zeitschr. Wiss. Phot. **26**, 111 (1928—'29); **27**, 79 (1929—'30).
11. J. EGGERT and W. NODDACK, Zeitschr. Physik. **20**, 299 (1923).

Physics. — Remark to the paper: *The mechanism in the positive column of a discharge* (by L. S. ORNSTEIN, H. BRINKMAN and T. HAMADA). By L. S. ORNSTEIN and H. BRINKMAN. (Communication from the Physical Laboratory of the University of Utrecht).

(Communicated at the meeting of March 28, 1936).

In an appendix to the paper cited in the title (Cf. the Proceedings Febr. 1936) we have given an elementary deduction of the v. d. of electrons moving in a gas discharge with constant gradient. This deduction only holds true for the case that no excitation or ionization occurs. Now it is easy to generalize our deduction, so that also excitation and ionization are included.

Let us assume that above an energy ϵ_a the electron can excite the atom, losing in this process the energy ϵ_a . If now ϵ is the energy of the electron, the probability of excitation will be a function of $\epsilon - \epsilon_a - \gamma'(\epsilon - \epsilon_a)$.

If we follow a group of electrons on their way, the change of energy, as we have shown, is given by the equation:

$$\frac{d\varepsilon}{dn} = -\beta\varepsilon + \psi \quad \beta = \frac{2m}{M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

leading to a PLANCK-FOKKER equation with $\beta\varepsilon^2$ as diffusion constant. Now besides this change of energy of the group during Δn collisions, there will also be a change ε_a with the probability $\gamma(\varepsilon - \varepsilon_a) \Delta n$. Thus for the non-exciting collisions, the equation (1) holds with the probability $1 - \gamma(\varepsilon - \varepsilon_a) \Delta n$. If now $W(\varepsilon, n) d\varepsilon$ represents the probability of an energy between ε and $\varepsilon + d\varepsilon$ after n collisions, we have for this function the functional equation:

$$W(\varepsilon, n + \Delta n) d\varepsilon = \int d\varepsilon' W(\varepsilon', n) \varphi(F) dF (1 - \gamma(\varepsilon' - \varepsilon_a) \Delta n)$$

where $\varepsilon' = \varepsilon(1 + \beta \Delta n) + F$, F being given by $F = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \psi dn$, $\varphi(F)$ representing the probability of the value F , its mean value being $\beta\varepsilon^2 \Delta n$.

If we develop this equation, we get:

$$\frac{\partial W(\varepsilon, n)}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\beta\varepsilon W(\varepsilon, n)) + \beta\varepsilon^2 \frac{\partial^2 W(\varepsilon, n)}{\partial \varepsilon^2} - \gamma(\varepsilon - \varepsilon_a) W(\varepsilon, n).$$

For the stationary state, therefore we have:

$$0 = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\beta\varepsilon W(\varepsilon)) + \beta\varepsilon^2 \frac{\partial^2 W(\varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} - \gamma(\varepsilon - \varepsilon_a) W(\varepsilon) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

In this equation the value of $\overline{\varepsilon^2}$ is given in the cited paper. If more states can be excited, the last term has to be replaced by a series of terms.

The equation (2) holds only for the case $\varepsilon > \varepsilon_a$; the influence of the excitation the production of electrons with energy ε from those with the energy $\varepsilon + \varepsilon_a$ is neglected. In order to take this into account we have to add a term

$$\gamma(\varepsilon) W(\varepsilon + \varepsilon_a),$$

to the equation.

The differential equation for the case $\varepsilon < \varepsilon_a$ can easily be found, for in this case the electrons travelling with the energy $\varepsilon + \varepsilon_a$ can change with a probability $\gamma(\varepsilon) \Delta n$ into such with an energy ε , so that we get the equation:

$$0 = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\beta\varepsilon W(\varepsilon)) + \beta\varepsilon^2 \frac{\partial^2 W(\varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} + \gamma(\varepsilon) W(\varepsilon + \varepsilon_a) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

It is evident how this equation ought to be generalized for the case of other critical values of the energy, either for excitation or for ionization of the atoms of the gas.

Mathematics. — *Konfigurationen von Punkten und Kreisen*. By Prof.
JAN DE VRIES.

(Communicated at the meeting of March 28, 1936).

§ 1. Konfigurationen von Punkten und Kreisen der Ebene wurden bis jetzt kaum beachtet. Wie leicht ersichtlich entsprechen die einfachsten, nicht trivialen, Kfg. dieser Art dem Symbole $(8_3, 6_4)$. Eine solche Kfg. besteht aus 6 Kreisen, welche je 4 Punkte tragen, indes jeder Punkt 3 Kreisen angehört. Durch eine Inversion, deren Zentrum mit einem der 8 Punkte zusammenfällt, entsteht aus der $(8_3, 6_4)$ eine Figur von 3 Kreisen und 3 Geraden, welche mit 7 Punkten derart zusammenhängen, dass jeder der Kreise 4 Punkte, jede Gerade 3 Punkte trägt.

Setzen wir den Fall, dass einer der 7 Punkte keiner der 3 Geraden angehört, so bilden diese ein Dreieck 257, dessen Seiten 27, 75, 52 der Reihe nach die Punkte 1, 6, 3 enthalten. Bekanntlich treffen sich die Kreise 123, 167, 356 in einem Punkte 4. Durch Inversion aus einem Punkte 8, als Zentrum, erhält man nun die Kfg. $(8_3, 6_4)$, welche der Tabelle

1234	5678
1278	3456
1467	2358

entspricht.¹⁾ In dieser Kfg. gibt es 3 Paare *getrennter Kreise*, d.h. Kreise, welche keinen Punkt der Kfg. gemein haben.

§ 2. Wenn in der durch Inversion erhaltenen Figur (*Bildfigur*) der Punkt 7 der Potenzpunkt dreier Kreise ist, welche sich zu je zwei in den Punktepaaren 1, 2; 3, 4; 5, 6 treffen, so ergibt Inversion aus dem Zentrum 8 die Kfg. $(8_3, 6_4)$ mit der Tabelle

1234	5678
1256	3478
1278	3456

Auch hier gibt es 3 Paare *getrennter Kreise*. Aber diese Kfg. enthält 4 Punktepaare, welche je 3 Kreise tragen, indes die vorhin betrachtete Kfg. 12 Punktepaare enthält, die je 2 Kreise tragen.

§ 3. Es möge in der Bildfigur der Punkt 2 die drei Geraden 34, 67, 58 tragen, wobei die 6 Punkte so gewählt sind, dass man drei Kreise bez. durch 3457, 3468, 5678 legen kann. Die Herstellung einer solchen Figur gelingt sehr einfach, wenn man eine Gerade durch 2 als Symmetrieachse wählt.

¹⁾ Zwei Punkte, die Bilder in der Inversion sind, werden mit derselben Ziffer bezeichnet.

Inversion aus dem Zentrum 1 ergibt die Kfg. welche der Tabelle

1234	5678
1258	3457
1267	3468

entspricht.

Durch Inversion aus dem Zentrum 8 erhält man aus dieser Kfg. eine Bildfigur, welche durchaus verschieden ist von der im Anfang von § 3 erwähnten. Sie enthält nämlich die Geraden 567, 512, 634 und die Kreise 1234, 1267, 3457. Ihre Herstellung gelingt leicht, wenn eine Gerade durch 7 als Symmetrieachse gewählt wird.

§ 4. Eine Figur, welche aus den Geraden 256, 357, 468 und den Kreisen 2467, 2378, 3458 besteht, ergibt durch Inversion aus dem Zentrum 1 die Kfg. $(8_3, 6_4)$ mit der Tabelle

1256	2467
1357	2378
1468	3458

Sie enthält *keine* Paare getrennter Kreise.

§ 5. Eine Figur, welche aus den Geraden 135, 126, 348 und den Kreisen 1258, 3456, 2468 besteht, wird durch Inversion aus dem Zentrum 7 zur Kfg. $(8_3, 6_4)$, welche der Tabelle

1258	2468
1267	3456
1357	3478

entspricht. Sie enthält *ein* Paar getrennter Kreise.

§ 6. Eine Kfg. $(8_4, 8_4)$ ergibt durch Inversion aus einem ihrer Punkte eine Figur von 4 Geraden und 4 Kreisen. Wenn diese Geraden ein Vierseit bilden, dessen 6 Eckpunkte Bilder von Punkten der Kfg. sind, so treffen sich die Umkreise der vier im Vierseite enthaltenen Dreiseite bekanntlich in einem siebenten Punkte. Durch Inversion dieser Figur aus einem beliebigen Punkte 8 als Zentrum erhält man nun die $(8_4, 8_4)$ mit der Tabelle

1367	2458
1457	2368
2357	1468
2467	1358

Sie besitzt vier Paare getrennter Kreise.

§ 7. Durch einen Punkt 7 werde ein Kreis k gelegt; g sei eine Gerade parallel zur Tangente in 7. Drei durch 7 gelegte Geraden treffen k und g bez. in den Punktpaaren 1, 2; 4, 3; 6, 5. Durch die Quadrupel 1, 2, 3, 4; 1, 2, 6, 5; 3, 4, 6, 5 können Kreise gelegt werden. Wird die

aus 4 Geraden und 4 Kreisen erhaltene Figur, aus einem Zentrum 8, einer Inversion unterworfen, so entsteht eine Kfg. $(8_4, 8_4)$ mit der Tabelle

1234	5678
1256	3478
1278	3456
1467	2358

Auch hier gibt es vier Paare getrennter Kreise. Diese Kfg. ist aber verschieden von der Kfg. des § 6; sie besitzt nämlich vier Punktepaaire, welche je 3 Kreise tragen.

Eine Kfg. welche dieser Tabelle entspricht, erhält man z.B. durch die Herstellung der nachfolgenden Figur.

Zwei konzentrische Kreise werden von zwei zu einander senkrechten gemeinschaftlichen Durchmessern bez. in den Punktepaairen 1, 7; 2, 8; 3, 5; 4, 6 getroffen. Alsdann gibt es, der obigen Tabelle entsprechend, noch 6 Kreise, welche je 4 dieser Punkte enthalten.¹⁾

Es möge noch bemerkt werden, dass die Hinzufügung der Kreise 1458, 2367 eine Kfg. $(8_5, 10_4)$ ergibt. Nimmt man noch die Geraden 7135 und 6428 hinzu, so erhält man durch Inversion, aus einem beliebigen Zentrum, eine Kfg. $(8_6, 12_4)$.

§ 8. Drei konzentrische gleichseitige Dreiecke 147, 258, 369 seien in ähnlicher Lage in Bezug auf ihr gemeinschaftliches Zentrum, wonach 1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9 bez. auf 3 Geraden liegen. Diese Figur enthält 9 konzyklische Punktquadrupel; demnach ergibt sich eine Kfg. $(9_4, 9_4)$ mit nachstehender Tabelle

1425	1278	4578
1436	1379	4679
2536	2389	5689

Sie enthält keine getrennte Kreise.

§ 9. Ersetzt man, in der Darstellung von § 8, die drei gleichseitigen Dreiecke durch drei regelmässige n -Ecke in ähnlicher Lage, so ergibt sich eine Kfg. $(3n_4, 3n_4)$.

Wenn $n = 4$ ist, erhält man z.B. aus den konzentrischen Quadraten 1, 2, 3, 4; 5, 6, 7, 8; 9, 10, 11, 12 die Kfg. $(12_4, 12_4)$ entsprechend der Tabelle

1	1	5	2	2	6	3	3	7	1	1	5
2	2	6	3	3	7	4	4	8	4	4	8
5	9	9	6	10	10	7	11	11	5	9	9
6	10	10	7	11	11	8	12	12	8	12	12

Nimmt man die Quadrupel 1, 2, 3, 4; 5, 6, 7, 8 und 9, 10, 11, 12 hinzu, so entsteht eine Kfg. $(12_5, 15_4)$.

¹⁾ Vgl. S. 9 der Dissertation von J. A. BARRAU (Bijdragen tot de theorie der configuraties, Amsterdam, 1907).

Mathematics. — *Verteilungsfunktionen.* Von J. G. VAN DER CORPUT.
(Siebente Mitteilung).

(Communicated at the meeting of March 28, 1936).

Erste Anwendung der hinreichenden Bedingung.

Die in der vierten Mitteilung formulierte und in der sechsten Mitteilung bewiesene hinreichende Bedingung wende ich hier an, um den in der Einleitung genannten Satz 12 zu beweisen.

Hilfssatz 12: Ist $\eta < \zeta$, und enthält das offene Intervall (η, ζ) wenigstens einen Häufungspunkt einer Folge U , so gibt es in diesem offenen Intervall eine monoton-nichtabnehmende Funktion $H(\gamma) = H(\gamma; \eta, \zeta)$, die überall ausserhalb $r(U)$ nach rechts, überall ausserhalb $l(U)$ nach links stetig ist, mit $H(\eta +) = 0$ und $H(\zeta -) = 1$, und mit der Eigenschaft, dass für jedes im offenen Intervall (η, ζ) liegende Zahlpaar α und β mit $H(\alpha) < H(\beta)$ die Folge U unendlich viele Zahlen u mit $\alpha \leq u < \beta$ enthält.

Beweis: Ich unterscheide verschiedene Fälle.

1. Das offene Intervall (η, ζ) enthält einen zu $r(U)$ oder $l(U)$ gehörige Zahl τ . Die Funktion

$$\begin{array}{ll} H(\gamma) = 0 & \text{für } \gamma < \tau \\ H(\gamma) = 1 & \text{für } \gamma > \tau \\ H(\tau) = 0 & \text{falls } \tau \text{ zu } r(U) \text{ gehört,} \\ H(\tau) = 1 & \text{falls } \tau \text{ nicht zu } r(U) \text{ gehört,} \end{array}$$

ist monoton-nichtabnehmend mit $H(\eta +) = 0$ und $H(\zeta -) = 1$, ausserhalb $r(U)$ nach rechts, ausserhalb $l(U)$ nach links stetig. Aus $H(\alpha) < H(\beta)$ folgt $\alpha \leq \tau < \beta$, falls τ zu $r(U)$ gehört, und $\alpha < \tau \leq \beta$, falls τ nicht zu $r(U)$, also zu $l(U)$ gehört. Folglich enthält U unendlich viele u mit $\alpha \leq u < \beta$.

2. Das offene Intervall (η, ζ) enthält ein offenes Teilintervall (η', ζ') , dessen Punkte alle Häufungspunkte von U sind. Die Funktion

$$\begin{array}{ll} H(\gamma) = 0 & \text{für } \gamma \leq \eta' \\ = 1 & \text{für } \gamma \geq \zeta' \\ \text{linear} & \text{für } \eta' \leq \gamma \leq \zeta' \end{array}$$

besitzt die verlangten Eigenschaften; denn aus $H(\alpha) < H(\beta)$ folgt, dass die Intervalle (η', ζ') und (α, β) ein Teilintervall gemeinsam haben und jeder Punkt dieses Teilintervalles ist ein Häufungspunkt von U , sodass U unendlich viele Zahlen zwischen α und β enthält.

3. Die Punkte η und ζ sind Häufungspunkte der Menge \mathfrak{S} der zwischen η und ζ liegenden Häufungspunkte von U ; das offene Intervall (η, ζ) enthält keinen Punkt von $r(U)$, keinen Punkt von $l(U)$ und kein ganz zu \mathfrak{S} gehöriges Teilintervall.

Jedem zwischen η und ζ liegenden und nicht zu \mathfrak{S} gehörigen Punkt v ordne ich das grösste in seinem Innern den Punkt v aber keinen Häufungspunkt von U enthaltende abgeschlossene Teilintervall i des abgeschlossenen Intervalles (η, ζ) zu. Zwei verschiedene dieser Intervalle i haben keine innern Punkte und sogar keinen Randpunkt gemeinsam, da ein gemeinsamer Randpunkt wenigstens einer der Mengen $r(U)$ und $l(U)$ angehören würde. Die Anzahl der verschiedenen i ist somit höchstens abzählbar unendlich.

Die Punkte η und ζ sind Häufungspunkte von \mathfrak{S} , gehören somit zu keinem i . Jedes Teilintervall von (η, ζ) enthält wenigstens einen nicht zu \mathfrak{S} gehörigen Punkt, hat somit mit mindestens einem i ein Intervall gemeinsam, sodass die Anzahl der verschiedenen i unendlich, also abzählbar unendlich ist. Ich nenne diese Intervalle i_1, i_2, \dots . Das Intervall $\gamma \leq \eta$ bezeichne ich mit i_{-1} , und das Intervall $\gamma \geq \zeta$ mit i_0 .

Jedem Intervall i_σ ($\sigma = -1, 0, 1, \dots$) ordne ich folgendermassen eine Zahl j_σ zu.

Es sei $j_{-1} = 0$ und $j_0 = 1$; sind $j_{-1}, j_0, \dots, j_{\sigma-1}$ schon festgelegt ($\sigma \geq 1$), so betrachte ich die zwei im System $(i_{-1}, i_0, \dots, i_{\sigma-1})$ vorkommenden und dem Intervall i_σ möglichst nahe liegenden Intervalle i_λ und i_ν , wobei i_λ links, i_ν rechts von i_σ liegt, und ich setze

$$j_\sigma = \frac{1}{2}(j_\lambda + j_\nu). \quad (115)$$

Liegt i_μ links von i_ν ($\mu \geq -1, \nu \geq -1$), so ist $j_\mu \leq j_\nu$; denn diese Ungleichung gilt für das Intervallepaar i_{-1} und i_0 und ist sie für jedes im System $(i_{-1}, i_0, \dots, i_{\sigma-1})$ vorkommende Intervallepaar schon bewiesen, so gilt sie wegen (115) auch für jedes im System $(i_{-1}, i_0, \dots, i_\sigma)$ vorkommende Intervallepaar.

Für jedes $\sigma \geq -1$ und für jedes zu i_σ gehörige γ setze ich $H(\gamma) = j_\sigma$, sodass die auf der Menge der i_σ ($\sigma = -1, 0, \dots$) definierte Funktion $H(\gamma)$ monoton-nichtabnehmend ist. Nach unserer Annahme ist jeder zwischen η und ζ liegende Punkt γ Häufungspunkt der Menge der nicht zu \mathfrak{S} gehörigen Punkte $\kappa > \gamma$; für jeden zu keinem i_σ ($\sigma \geq -1$) gehörigen Punkt γ setze ich $H(\gamma)$ gleich der unteren Schranke der Zahlen $H(\kappa)$, wo $\kappa > \gamma$ nicht zu \mathfrak{S} gehört.

Ich brauche nur noch zu zeigen, dass die so überall definierte Funktion $H(\gamma)$ die verlangten Eigenschaften besitzt.

die Ungleichung $\varphi_k(\alpha') < \varphi_k(\beta')$ gilt. Die Zahlen α' und β' liegen dann im offenen Intervall $(\gamma_{k,z}, \gamma_{k,z+1})$, sodass dann $0 \leq z \leq k$ ist und (118) mit $\gamma = \alpha'$ und mit $\gamma = \beta'$ gilt, also

$$H(\alpha'; \gamma_{k,z}, \gamma_{k,z+1}) < H(\beta'; \gamma_{k,z}, \gamma_{k,z+1})$$

ist. Nach dem vorigen Hilfssatz enthält U dann unendlich viele Zahlen u mit $\alpha' \leq u < \beta'$, also mit $\alpha \leq u < \beta$.

Jedes α mit $\varphi_k(\alpha) < 1$ besitzt die Eigenschaft, dass U unendlich viele Zahlen $u \geq \alpha$ enthält. Denn ist $\psi(\alpha) < 1$, so kommen, da $\psi(\gamma)$ die Eigenschaft $\mathfrak{G}(U)$ besitzt, in U unendlich viele Zahlen $\geq \alpha$ vor. Sonst ist, der Definition der Folge $\gamma_0, \gamma_1, \dots$ gemäss, $\psi(\gamma_1) = 1$; die Zahl γ_1 kommt im System $(\gamma_{k0}, \dots, \gamma_{k,k+1})$ vor, sodass dann

$$\varphi_k(\gamma_1) = \psi(\gamma_1) = 1 > \varphi_k(\alpha)$$

ist, also U nach dem Obigen unendlich viele Zahlen U mit $\alpha \leq u < \gamma_1$, also mit $u \geq \alpha$ enthält.

Auf dieselbe Art zeigt man, dass U für jedes β mit $\varphi_k(\beta) > 0$ unendlich viele Zahlen $u < \beta$ enthält; dabei unterscheide man $\psi(\beta) > 0$ und $\psi(\beta) = 0$.

Hiermit habe ich bewiesen, dass $\varphi_k(\gamma)$ ($k = 1, 2, \dots$) die Eigenschaft $\mathfrak{G}(U)$ besitzt, und brauche ich nur noch Beziehung (117) zu beweisen. Diese Beziehung ist für jeden in der Folge $\gamma_0, \gamma_1, \dots$, vorkommenden Punkt ζ (also insbesondere für jeden Unstetigkeitspunkt von $\psi(\gamma)$) evident, da dann für hinreichend grosses k

$$\varphi_k(\zeta) = \psi(\zeta)$$

ist. Sonst wähle ich eine beliebige positive Zahl ε ; da $\psi(\gamma)$ dann in ζ stetig ist, entspricht jedem hinreichend grossem k ein z ($0 \leq z \leq k$) mit

$$\gamma_{kz} < \zeta < \gamma_{k,z+1} \text{ und } \psi(\zeta) - \varepsilon < \psi(\gamma_{kz}) \leq \psi(\gamma_{k,z+1}) < \psi(\zeta) + \varepsilon,$$

also

$$\psi(\zeta) - \varepsilon < \varphi_k(\gamma_{kz}) \leq \varphi_k(\zeta) \leq \varphi_k(\gamma_{k,z+1}) < \psi(\zeta) + \varepsilon,$$

sodass auch dann (117) gilt.

Hiermit ist Hilfssatz 13 vollständig bewiesen.

Beweis von Satz 12.

Die linearen Komposita $\psi(\gamma) = \lambda_1 \psi_1(\gamma) + \dots + \lambda_k \psi_k(\gamma)$, wobei die k Koeffizienten ≥ 0 sind und eine Summe gleich Eins besitzen, sind monoton-nichtabnehmend, ≥ 0 und ≤ 1 . Jedem Zahlpaar α und β mit $\psi(\alpha) < \psi(\beta)$, jedem α mit $\psi(\alpha) < 1$, oder jedem β mit $\psi(\beta) > 0$ entspricht ein z ($1 \leq z \leq k$) von der Art, dass die analoge Eigenschaft mit ψ_z statt ψ gilt; da ψ_z die Eigenschaft $\mathfrak{G}(U)$ besitzt, enthält U unendlich viele Zahlen u mit $\alpha \leq u < \beta$, oder $u \geq \alpha$ oder $u < \beta$. Hiermit ist bewiesen,

dass die linearen Komposita $\psi(\gamma)$ die Eigenschaft $\mathfrak{G}(U)$ besitzen. Ich brauche also nur noch eine Folge $\varphi_1(\gamma), \varphi_2(\gamma), \dots$ von Funktionen mit der Eigenschaft $\mathfrak{G}(U)$ anzugeben, die den drei in Satz 20 genannten Bedingungen genügt. Für $k=1$ habe ich das schon im vorigen Hilfssatz getan, da \mathfrak{M} für $k=1$ aus nur einer Funktion $\psi_1(\gamma)$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{G}(U)$ besteht. Ich darf also $k \geq 2$ voraussetzen und eine aus Funktionen mit der Eigenschaft $\mathfrak{G}(u)$ bestehende Folge $\chi_1(\gamma), \chi_2(\gamma), \dots$ annehmen, die die drei in Satz 20 genannten Eigenschaften besitzt, wenn darin \mathfrak{M} durch die Menge \mathfrak{M}^* der linearen Komposita $\mu_1 \psi_1(\gamma) + \dots + \mu_{k-1} \psi_{k-1}(\gamma)$ ersetzt wird; hierin sind die $k-1$ Koeffizienten ≥ 0 und besitzen eine Summe gleich Eins. Um nun eine Folge $\varphi_1(\gamma), \varphi_2(\gamma), \dots$ mit den verlangten Eigenschaften anzugeben, brauche ich nur den Beweis von Satz 8 wörtlich zu wiederholen, wenn ich nur auf S. 816 (Z. 1 v. u.) und 817 (Z. 1 v. o.) die Worte „stetiger monoton-nichtabnehmender Funktionen ≥ 0 und ≤ 1 “ durch „von Funktionen mit der Eigenschaft $\mathfrak{G}(U)$ “ ersetze.

Hiermit ist Satz 12 bewiesen.

Mathematics. — *Ueber einige VINOGRADOFFsche Methoden.* Von J. G. VAN DER CORPUT. (Zweite Mitteilung).

(Communicated at the meeting of March 28, 1936).

In dieser zweiten Mitteilung leite ich mittels einer VINOGRADOFFschen Methode einige Hilfssätze ab, die ich für den Beweis des Hauptsatzes (Satz 4) der ersten Mitteilung ¹⁾ brauche. Diese Methode stützt sich auf die folgenden Gedanken.

Es sei $H > 1$ und es bezeichne

$$\varphi(w; H) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_{h,H} e^{2\pi i h w} \text{ mit } a_{0,H} = 0$$

eine goniometrische Reihe (oder ein goniometrisches Polynom), die im Intervall $\frac{1}{H} \leq w \leq 1$ einen Wert ≥ 1 besitzt (vergl. Hilfssatz 1); es mögen l, Y, X_1, \dots, X_l natürliche, α und β beliebige reelle Zahlen, H_1, \dots, H_l beliebige Zahlen > 1 bezeichnen, und es seien die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ für jedes ganze $x > 0$ definiert. Um zu zeigen, dass es wenigstens ein System ganzzahliger λ, x, y, z mit

$$1 \leq \lambda \leq l; \quad X_\lambda \leq x < 2X_\lambda; \quad Y \leq y < 2Y$$

und

$$0 < \alpha f(x) g(y) - \beta - z < \frac{1}{H_\lambda}$$

¹⁾ Siehe Proc. Royal Acad. Amsterdam, **39**, 345, (1936).

gibt, brauche ich nur zu zeigen, dass die Summe

$$\Sigma = \sum_{y=1}^{2Y-1} \sum_{x_1=1}^{2X_1-1} \dots \sum_{x_l=1}^{2X_l-1} \varphi(\alpha f(x_1)g(y)-\beta; H_1) \dots \varphi(\alpha f(x_l)g(y)-\beta; H_l) \quad (10)$$

einen Absolutwert $< Y X_1 \dots X_l$ besitzt; denn wenn das Ungleichungssystem keine Lösung hat, so ist nach Definition von φ jeder Faktor $\varphi(\alpha f(x_\lambda)g(y)-\beta; H_\lambda) \equiv 1$ ($1 \leq \lambda \leq l$), also $\Sigma \equiv Y X_1 \dots X_l$. Ich brauche somit eine obere Schranke für $|\Sigma|$, und um diese zu gewinnen, genügt es für jedes System ganzer nicht-verschwindender Zahlen h_1, \dots, h_l eine obere Schranke für den Absolutwert der Summe

$$S = \sum_{y=1}^{2Y-1} \sum_{x_1=1}^{2X_1-1} \dots \sum_{x_l=1}^{2X_l-1} e^{2\pi i \alpha g(y)(h_1 f(x_1) + \dots + h_l f(x_l))}$$

abzuleiten. Besonders erfreulich ist, dass Herr VINOGRADOFF mittels einer vernünftigen originellen Methode eine hinreichend kleine obere Schranke für $|S|$ gefunden hat. (Vergl. Hilfssatz 5). In dieser Schranke tritt die kleinste (von $h_1, \dots, h_l, X_1, \dots, X_l$ und der Wahl der Funktion f abhängige) Zahl N auf mit der Eigenschaft, dass für jedes ganze w die Anzahl der ganzzahligen Systeme $x_1, \dots, x_l, x'_1, \dots, x'_l$ mit

$$\sum_{\lambda=1}^l h_\lambda (f(x_\lambda) - f(x'_\lambda)) = w; \quad X_\lambda \leq x_\lambda < 2X_\lambda \quad \text{und} \quad X_\lambda \leq x'_\lambda < 2X_\lambda \quad (\lambda = 1, \dots, l)$$

höchstens N ist. Darum leite ich in Hilfssatz 6 eine obere Schranke für N ab. So finde ich für Σ eine obere Schranke, die mir ermöglicht, Satz 4 zu beweisen.

Ich werde nicht nur Satz 4 herleiten, sondern sogar den folgenden Satz, der etwas allgemeiner ist.

Satz 10: Voraussetzung A sei erfüllt¹⁾; zu der reellen rationalen Zahl α gehöre eine Folge irreduzibler Brüche $\frac{p}{q}$ mit unbeschränkt wachsenden Nennern und mit $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\tau}{q^2}$, wo τ eine von q abhängige Zahl ≥ 1 und $< q$ bedeutet; jedem dieser Brüche $\frac{p}{q}$ sei eine natürliche Zahl Y mit

$$\frac{1}{t} \leq \liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{\log Y}{\log q} \leq \limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{\log Y}{\log \frac{q}{\tau}} \leq \frac{1}{t-1} \quad \dots \quad (11)$$

und

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{\log g(Y)}{\log Y} \leq t \quad \dots \quad (12)$$

zugeordnet.

¹⁾ Der Leser findet diese Voraussetzung in der ersten Mitteilung auf S. 345.

Bei geeignet nur von n, t, ξ und η abhängigem positivem δ gehört alsdann zu jedem der Brüche $\frac{p}{q}$ mit hinreichend grossem Nenner und zu jedem reellen β mindestens ein System ganzer Zahlen x, y, z mit

$$0 < \alpha f(x) g(y) - \beta - z < x^{\xi-\delta} y^{-\eta} z^{\delta},$$

$$Y \leq y < 2Y; \quad 1 \leq x < 2Y^{\frac{t-1-\eta}{n+\xi}} \quad \text{und} \quad \liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{\log x}{\log q} > 0.$$

Der Spezialfall dieses Satzes mit $\tau=1$ ist mit Satz 4 der ersten Mitteilung identisch.

Hilfssatz 1: Jedem positiven ε kann ein nur von ε abhängiges $c > 0$ zugeordnet werden mit der Eigenschaft, dass zu jedem $H > 1$ ein reelles goniometrisches Polynom

$$\varphi(w; H) = \sum_{|h| \leq c H^{1+\varepsilon}} a_{h,H} e^{2\pi i h w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

mit $a_{0,H} = 0$, $|a_{h,H}| \leq c$ und

$$\varphi(w; H) \equiv 1 \quad \text{im Intervall} \quad \frac{1}{H} \leq w \leq 1$$

gehört.

Beweis: Es sei N die kleinste ganze Zahl $\geq \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$, sodass $N \geq 2$ und $N \leq (N-1)(1+\varepsilon)$ ist. Im Intervall $0 \leq v \leq 1$ definiere ich eine bei gegebenem ε eindeutig bestimmte N -mal stetig differentiierbare reelle Funktion $\psi(v)$ mit

$$\int_0^1 \psi(v) dv = 1 \quad \text{und} \quad \psi^{(v)}(0) = \psi^{(v)}(1) = 0 \quad (v = 0, \dots, N-1).$$

Die Funktion $\chi(w, H)$ mit der Periode 1 und

$$\begin{aligned} \chi(w; H) &= 2 - 2H\psi(Hw) \quad \text{im Intervall} \quad 0 \leq w \leq \frac{1}{H} \\ &= 2 \quad \text{im Intervall} \quad \frac{1}{H} < w < 1, \end{aligned}$$

besitzt eine Fourierentwicklung

$$\chi(w; H) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_{h,H} e^{2\pi i h w}.$$

Dabei ist

$$a_{0,H} = \int_0^1 2 \, dw - 2H \int_0^H \psi(Hw) \, dw = 2 - 2 \int_0^1 \psi(v) \, dv = 0$$

und

$$|a_{h,H}| = \left| \int_0^1 \chi(w; H) e^{-2\pi i h w} \, dw \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{H}} c_1 H \, dw + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{H}}^1 c_1 \, dw < c_1;$$

hierin bezeichnet c_1 (desgl. c_2 nachher) eine geeignet gewählte, nur von ε abhängige Zahl.

Für $h \neq 0$ ist

$$\begin{aligned} a_{h,H} &= \frac{1}{2\pi i h} \int_0^1 \chi'(w; H) e^{-2\pi i h w} \, dw \\ &= -\frac{2H^2}{2\pi i h} \int_0^{\frac{1}{H}} \psi'(Hw) e^{-2\pi i h w} \, dw \\ &= -\frac{2H^{N+1}}{(2\pi i h)^N} \int_0^H \psi^{(N)}(Hw) e^{-2\pi i h w} \, dw, \end{aligned}$$

also

$$|a_{h,H}| \leq c_2 H^N |h|^{-N}.$$

Wird nun c so gross gewählt, dass

$$c_1 \leq c \text{ und } 2c_2 c^{-N} + \frac{2}{N-1} c_2 c^{1-N} \leq 1$$

ist, dann ist $|a_{h,H}| \leq c$ und

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|h| > cH^{1+\varepsilon}} a_{h,H} e^{2\pi i h w} \right| &\leq 2 \sum_{h > cH^{1+\varepsilon}} c_2 H^N h^{-N} \\ &< 2c_2 H^N (cH^{1+\varepsilon})^{-N} + 2 \int_{cH^{1+\varepsilon}}^{\infty} c_2 H^N u^{-N} \, du \\ &< 2c_2 c^{-N} + \frac{2}{N-1} c_2 H^N (cH^{1+\varepsilon})^{1-N} \\ &< 2c_2 c^{-N} + \frac{2}{N-1} c_2 c^{1-N} \quad \text{wegen } N \leq (N-1)(1+\varepsilon) \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

sodass das im Hilfssatze durch die Formel (13) definierte goniometrische Polynom $\varphi(w; H)$ im Intervall $\frac{1}{H} \leq w \leq 1$ einen Wert $\geq 2 - 1 = 1$ besitzt. Hiermit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Hilfssatz 2: Es sei $\tau \geq 1$, $U > 0$, D ganz, a reell; p und q seien teilerfremde ganze Zahlen ($q > 0$) mit $\left| a - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\tau}{q^2}$. Dann ist

$$\sum_{v=D}^{D+q-1} \text{Min} \left(U, \frac{1}{(av)} \right) \leq 6 U \tau + 2 q \log q;$$

hierin ist $\text{Min}(a, b)$ die kleinere der Zahlen a und b ; (w) ist die Entfernung von w zur nächsten ganzen Zahl.

Beweis: Wird $C = D + \frac{1}{2}q$ oder $D + \frac{1}{2}(q-1)$ gesetzt, je nachdem q gerade oder ungerade ist, so ist $|(v-C)| \leq \frac{1}{2}q$ für jedes im Intervall $D \leq v \leq D+q-1$ liegende v , also wegen $\left| a - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\tau}{q^2}$

$$\left| av - aC - \frac{p}{q}(v-C) \right| \leq \frac{\tau |v-C|}{q^2} \leq \frac{\tau}{2q}. \quad \dots \quad (14)$$

Durchläuft v das System $D, D+1, \dots, D+q-1$, so durchläuft $p(v-C)$, da p und q teilerfremd sind, ein vollständiges Restsystem mod. q . Bezeichnet r_v den zwischen $-\frac{1}{2}$ (excl.) und $\frac{1}{2}$ (incl.) gewählten Rest modulo Eins von $aC + \frac{p}{q}(v-C)$, so bilden die Punkte $r_D, r_{D+1}, \dots, r_{D+q-1}$ ein äquidistantes System mit Entfernung $\frac{1}{q}$. Die Anzahl der v mit $-\frac{5\tau}{2q} \leq r_v \leq \frac{5\tau}{2q}$ ist somit höchstens 6τ und der Beitrag dieser v zu der Summe $\sum_{v=D}^{D+q-1}$ ist höchstens $6 U \tau$. Für alle v mit $r_v > \frac{5\tau}{2q}$ gilt wegen (14) die Ungleichung $(av) \geq r_v - \frac{\tau}{2q}$, sodass der Beitrag dieser v höchstens

$$\frac{1}{\frac{2}{q}} + \frac{1}{\frac{3}{q}} + \dots + \frac{1}{\frac{q}{q}} < q \int_1^q \frac{du}{u} = q \log q$$

ist. Genau so findet man dieselbe obere Schranke für den Beitrag der v mit $r_v < -\frac{5\tau}{2q}$, womit Hilfssatz 2 bewiesen ist.

Hilfssatz 3: Ist $\tau \geq 1$, G ganz > 0 , $U > 0$, a reell und bezeichnen p und q teilerfremde ganze Zahlen ($q > 0$) mit $\left| a - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\tau}{q^2}$, so ist

$$\sum_{v=1}^G \text{Min} \left(U, \frac{1}{(av)} \right) \leq (2 + q^{-1} G) (6 U \tau + 2 q \log q).$$

Beweis: Ist $H = \left\lceil \frac{G-1}{q} \right\rceil$, so ist $H < 1 + q^{-1} G$. Ich wende nun den vorigen Hilfssatz $H+1$ mal an, nämlich mit $D=1, q+1, \dots, Hq+1$. Addition der entstehenden Ungleichungen liefert Hilfssatz 3.

Hilfssatz 4: Sind F und G natürliche Zahlen, ist $\tau \geq 1$ und ist der reellen Zahl a ein irreduzibler Bruch $\frac{p}{q}$ mit $q > 0$ und $\left| a - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\tau}{q^2}$ zugeordnet, so ist

$$\sum_{v=1}^G \left| \sum_{|w| \leq \frac{1}{2}(F-1)} e^{2\pi i \alpha v w} \right| \leq (2 + q^{-1} G) (6 F \tau + 2 q \log q).$$

Beweis: Für jedes nicht-ganze αv ist

$$\left| \sum_{|w| \leq \frac{1}{2}(F-1)} e^{2\pi i \alpha v w} \right| \leq \frac{2}{|\sin \pi \alpha v|} \leq \frac{1}{(av)},$$

wo (z) die Entfernung von z zur nächsten ganzen Zahl bezeichnet. Es ist somit

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^G \left| \sum_{|w| \leq \frac{1}{2}(F-1)} e^{2\pi i \alpha v w} \right| &\leq \sum_{v=1}^G \text{Min} \left(F, \frac{1}{(av)} \right) \\ &\leq (2 + q^{-1} G) (6 F \tau + 2 q \log q) \end{aligned}$$

nach dem vorigen Hilfssatz.

Hilfssatz 5: Es mögen l, Y, X_1, \dots, X_l natürliche Zahlen bezeichnen; es sei $h_\lambda \neq 0$ ganz für $\lambda = 1, \dots, l$; für jedes ganze $x > 0$ seien $f(x)$ und $g(x)$ definiert, ganzzwertig und monoton-wachsend.

Für jedes ganze w sei die Anzahl der ganzzahligen Systeme $x_1, \dots, x_l, x'_1, \dots, x'_l$ mit

$$\sum_{\lambda=1}^l h_\lambda (f(x_\lambda) - f(x'_\lambda)) = w; \quad X_\lambda \leq x_\lambda < 2X_\lambda; \quad X_\lambda \leq x'_\lambda < 2X_\lambda \quad (\lambda=1, \dots, l)$$

höchstens gleich der von w unabhängigen Zahl N ; für jedes positive ganze v sei die Anzahl der positiven ganzzahligen Zahlpaare y und y' mit $g(y) - g(y') = v$ höchstens gleich Cv^ε , wo C und ε positive von v unabhängige Zahlen bedeuten.

Wird schliesslich der reellen Zahl a noch ein irreduzibler Bruch $\frac{p}{q}$ mit $q > 0$ und $\left| a - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\tau}{q^2}$ zugeordnet ($\tau \geq 1$), so hat die Summe

$$S = \sum_{y=Y}^{2Y-1} \sum_{x_1=X_1}^{2X_1-1} \dots \sum_{x_l=X_l}^{2X_l-1} e^{2\pi i \alpha g(y)(h_1 f(x_1) + \dots + h_l f(x_l))}$$

einen Absolutwert

$$|S| \leq Y^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} + 3 C^{\frac{1}{2}} Y^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} (1 + q^{-1} G)^{\frac{1}{2}} (F\tau + q \log q)^{\frac{1}{2}};$$

hierin ist

$$F = 1 + 2 \sum_{\lambda=1}^l |h_\lambda| (f(2X_\lambda) - f(X_\lambda)) \text{ und } G = g(2Y) - g(Y).$$

Beweis: Nach der CAUCHYSchen Ungleichung ist

$$\begin{aligned} |S|^2 &\leq Y \sum_{y=Y}^{2Y-1} \left| \sum_{x_1=X_1}^{2X_1-1} \dots \sum_{x_l=X_l}^{2X_l-1} \right|^2 \\ &= Y \sum_{y=Y}^{2Y-1} \sum_{x_1=X_1}^{2X_1-1} \dots \sum_{x_l=X_l}^{2X_l-1} \sum_{x'_1=X_1}^{2X_1-1} \dots \sum_{x'_l=X_l}^{2X_l-1} e^{2\pi i \alpha g(y)w} \end{aligned}$$

wo

$$w = \sum_{\lambda=1}^l h_\lambda (f(x_\lambda) - f(x'_\lambda))$$

ist. Folglich ist

$$|S|^2 \leq Y \sum_{x_1=X_1}^{2X_1-1} \dots \sum_{x_l=X_l}^{2X_l-1} \sum_{x'_1=X_1}^{2X_1-1} \dots \sum_{x'_l=X_l}^{2X_l-1} \left| \sum_{y=Y}^{2Y-1} e^{2\pi i \alpha g(y)w} \right|,$$

also

$$|S|^2 \leq Y N \sum_{|w| \leq \frac{1}{2}(F-1)} \left| \sum_{y=Y}^{2Y-1} e^{2\pi i \alpha g(y)w} \right|. \quad (15)$$

Hierin nimmt w höchstens F verschiedene Werte an, sodass nach der CAUCHYSchen Ungleichung

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{|w| \leq \frac{1}{2}(F-1)} \left| \sum_{y=Y}^{2Y-1} e^{2\pi i \alpha g(y)w} \right| \right\}^2 &\leq F \sum_{|w| \leq \frac{1}{2}(F-1)} \left| \sum_{y=Y}^{2Y-1} e^{2\pi i \alpha g(y)w} \right|^2 \\ &= F \sum_{|w| \leq \frac{1}{2}(F-1)} \sum_{y=Y}^{2Y-1} \sum_{y'=Y}^{2Y-1} e^{2\pi i \alpha (g(y) - g(y'))w} \\ &\leq F \sum_{y=Y}^{2Y-1} \sum_{y'=Y}^{2Y-1} \left| \sum_{|w| \leq \frac{1}{2}(F-1)} e^{2\pi i \alpha (g(y) - g(y'))w} \right| \end{aligned}$$

ist. Hierin ist

$$\sum_{y=Y}^{2Y-1} \sum_{y'=Y}^{2Y-1} = \sum_{y=Y}^{2Y-1} \sum_{y'=Y}^{2Y-1} + \sum_{y=Y}^{2Y-1} \sum_{y'=Y}^{2Y-1} + \sum_{y=Y}^{2Y-1} \sum_{y'=Y}^{2Y-1} = S_1 + S_2 + S_3$$

mit $S_1 \leq YF$ und

$$\begin{aligned} |S_2| &= |S_3| \leq \sum_{v=1}^{g(2Y)-g(Y)} C v^z \left| \sum_{w \leq \frac{1}{2}(F-1)} e^{2\pi i \alpha v w} \right| \\ &\leq C G^z \sum_{v=1}^G \left| \sum_{w \leq \frac{1}{2}(F-1)} e^{2\pi i \alpha v w} \right| \\ &\leq C G^z (2 + q^{-1} G) (6 F \tau + 2 q \log q) \quad \text{nach Hilfssatz 4} \\ &< 3^3 C G^z (1 + q^{-1} G) (F \tau + q \log q). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\left\{ \sum_{w \leq \frac{1}{2}(F-1)} \left| \sum_{y=Y}^{2Y-1} e^{2\pi i \alpha g(y) w} \right| \right\}^{\frac{1}{2}} < Y^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} + 3 F^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} (1 + q^{-1} G)^{\frac{1}{2}} (F \tau + q \log q)^{\frac{1}{2}},$$

sodass die Behauptung aus (15) folgt.

Hilfssatz 6: Es sei $f(x)$ für jedes positive ganze x definiert, ganzzwertig und monoton-wachsend mit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(f(2x) - f(x))}{\log x} = n \text{ und } \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(f(x+1) - f(x))}{\log x} = n-1, \quad (16)$$

wo $n > 1$ ist. Es seien l, X_1, \dots, X_l natürliche Zahlen; h_λ sei ganz $\neq 0$ für $\lambda = 1, \dots, l$ mit

$$|h_1| X_1^n \geq |h_2| X_2^n \geq \dots \geq |h_l| X_l^n. \quad (17)$$

Bezeichnet $N = N \left(\begin{smallmatrix} X_1 \dots X_l \\ h_1 \dots h_l \end{smallmatrix} \right)$ die kleinste Zahl mit der Eigenschaft, dass für jedes ganze w die Anzahl der ganzzahligen Systeme $(x_1, \dots, x_l, x'_1, \dots, x'_l)$ mit

$$\sum_{\lambda=1}^l h_\lambda (f(x_\lambda) - f(x'_\lambda)) = w; X_\lambda \leq x_\lambda < 2X_\lambda, X_\lambda \leq x'_\lambda < 2X_\lambda \quad (\lambda=1, \dots, l) \quad (18)$$

höchstens gleich N ist, so gehört zu jedem positiven ε eine nur von ε, l und der Wahl der Funktion f abhängige positive Zahl c_3 mit

$$N \left(\begin{smallmatrix} x_1 \dots x_l \\ h_1 \dots h_l \end{smallmatrix} \right) \leq c_3 X_1^{1+\varepsilon} \dots X_l^{1+\varepsilon} \prod_{\lambda=1}^{l-1} \left(1 + \frac{|h_{\lambda+1}| X_{\lambda+1}^n}{|h_\lambda| X_\lambda^{n-1}} \right).$$

Beweis: Wegen der Monotonie der Funktion f gibt es bei gegebenen w und x'_1 höchstens ein einziges x_1 mit $h_1(f(x_1) - f(x'_1)) = w$, sodass $N\left(\frac{X_1}{h_1}\right) \leq X_1$ ist. Ich darf also $l \geq 2$ und

$$N\left(\frac{x_2 \dots x_l}{h_2 \dots h_l}\right) \leq c_4 X_2^{1+\frac{1}{2}\varepsilon} \dots X_l^{1+\frac{1}{2}\varepsilon} \prod_{\lambda=2}^{l-1} \left(1 + \frac{|h_{\lambda+1}| X_{\lambda+1}^n}{|h_\lambda| X_\lambda^{n-1}}\right)$$

annehmen, wobei c_4 (desgl. c_5, c_6, c_7, c_8 nachher) eine geeignet gewählte, nur von ε, l und f abhängige positive Zahl bezeichnet.

Aus (16) folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=2}^l |h_\lambda| (f(2X_\lambda) - f(X_\lambda)) &\leq c_5 \sum_{\lambda=2}^l |h_\lambda| X_\lambda^{n+\frac{1}{2}\varepsilon} \\ &\leq c_5 X_2^{\frac{1}{2}\varepsilon} \dots X_l^{\frac{1}{2}\varepsilon} \sum_{\lambda=2}^l |h_\lambda| X_\lambda^n \\ &\leq c_6 X_2^{\frac{1}{2}\varepsilon} \dots X_l^{\frac{1}{2}\varepsilon} |h_2| X_2^n \end{aligned}$$

wegen (17). Für jedes System $x_1, \dots, x_l, x'_1, \dots, x'_l$ mit (18) ist somit

$$\begin{aligned} |h_1(f(x_1) - f(x'_1)) - w| &\leq \sum_{\lambda=2}^l |h_\lambda| (f(2X_\lambda) - f(X_\lambda)) \\ &\leq c_6 X_2^{\frac{1}{2}\varepsilon} \dots X_l^{\frac{1}{2}\varepsilon} |h_2| X_2^n. \end{aligned}$$

Aus (16) und der Monotonie von f geht hervor, dass im Intervall $X_1 \leq x_1 < 2X_1$

$$|h_1(f(x_1 + 1) - f(x_1))| \geq c_7 |h_1| X_1^{n-1-\frac{1}{2}\varepsilon}$$

ist, sodass bei gegebenen $w, x_2, \dots, x_l, x'_1, \dots, x'_l$ die Anzahl der verschiedenen x_1 mit (18) höchstens

$$1 + \frac{2c_6}{c_7} X_1^{\frac{1}{2}\varepsilon} \dots X_l^{\frac{1}{2}\varepsilon} \frac{|h_2| X_2^n}{|h_1| X_1^{n-1}} \leq c_8 X_1^{\frac{1}{2}\varepsilon} \dots X_l^{\frac{1}{2}\varepsilon} \left(1 + \frac{|h_2| X_2^n}{|h_1| X_1^{n-1}}\right)$$

ist. Bei gegebenen $w, x_2, \dots, x_l, x'_2, \dots, x'_l$ ist folglich die Anzahl der Zahlpaare (x_1, x'_1) mit (18) höchstens

$$c_8 X_1^{1+\frac{1}{2}\varepsilon} X_2^{\frac{1}{2}\varepsilon} \dots X_l^{\frac{1}{2}\varepsilon} \left(1 + \frac{|h_2| X_2^n}{|h_1| X_1^{n-1}}\right),$$

sodass

$$\begin{aligned} N\left(\begin{matrix} X_1 \dots X_l \\ h_1 \dots h_l \end{matrix}\right) &\leq c_8 X_1^{1+\frac{1}{2}} X_2^{\frac{1}{2}} \dots X_l^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{|h_{21}| X_2^n}{|h_1| X_1^{n-1}}\right) N\left(\begin{matrix} X_2 \dots X_l \\ h_2 \dots h_l \end{matrix}\right) \\ &\leq c_3 X_1^{1+\varepsilon} \dots X_l^{1+\varepsilon} \prod_{\lambda=1}^{l-1} \left(1 + \frac{|h_{\lambda+1}| X_{\lambda+1}^n}{|h_\lambda| X_\lambda^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

ist.

Hilfssatz 7: Ist l ganz ≥ 1 und $L_1 \geq L_2 \geq \dots \geq L_l \geq 1$, so ist

$$\sum_{\substack{|h_1| \leq L_1 \\ h_1 \neq 0}} \dots \sum_{\substack{|h_l| \leq L_l \\ h_l \neq 0}} \prod_{\lambda=1}^{l-1} \left(1 + \frac{|h_{\lambda+1}|^{\frac{1}{2}}}{|h_\lambda|^{\frac{1}{2}}}\right) \leq c_9 L_1 \dots L_l,$$

wo c_9 (desgl. c_{10} nachher) nur von l abhängt.

Beweis: Das im Hilfssatz auftretende Produkt $\prod_{\lambda=1}^{l-1}$ kann als Summe von 2^{l-1} Gliedern der Gestalt

$$B = \frac{|h_{\tau_1+1}|^{\frac{1}{2}} |h_{\tau_2+1}|^{\frac{1}{2}} \dots |h_{\tau_s+1}|^{\frac{1}{2}}}{|h_{\tau_1}|^{\frac{1}{2}} |h_{\tau_2}|^{\frac{1}{2}} \dots |h_{\tau_s}|^{\frac{1}{2}}},$$

geschrieben werden, wo $0 \leq s \leq l-1$, $1 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_s < l$ ist (für $s=0$ ist $B=1$). Man hat

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{h_1 \leq L_1 \\ h_1 \neq 0}} \dots \sum_{\substack{h_l \leq L_l \\ h_l \neq 0}} B &\leq c_{10} L_1 \dots L_l \frac{L_{\tau_1+1}^{\frac{1}{2}} \dots L_{\tau_s+1}^{\frac{1}{2}}}{L_{\tau_1}^{\frac{1}{2}} \dots L_{\tau_s}^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq c_{10} L_1 \dots L_l, \end{aligned}$$

woraus Hilfssatz 7 folgt.

Mathematics. — *Zur Theorie der p -Relationen.* Von R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of March 28, 1936).

Ich gebe im Nachstehenden einen besonders einfachen Beweis des Satzes von MERTENS, dass die quadratischen p -Relationen einen Modul für alle p -Relationen (ganzen rationalen Beziehungen zwischen G_d -Koordinaten = Determinanten einer Matrix) bilden. Er beruht auf dem Induktionsschluss von $d-1$ auf d . Bei $d=2$ (Linienkoordinaten) lässt sich ein Satz von GORDAN aus der Theorie der binären Formen heranziehen, der hier in vereinfachter Form bewiesen wird.

§ 1.

Es seien die $\binom{n}{d}$ Grössen $p_{i_1 i_2 \dots i_d}$ die homogenen Punktkoordinaten eines G_d im G_n , also die d -reihigen Determinanten aus der Matrix

$$\left\| \begin{array}{cccccc} y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & y_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(d)} & y_2^{(d)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & y_n^{(d)} \end{array} \right\| \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

Hier sind $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(d)}$ d linear-unabhängige Punkte, die das Gebiet G_d bestimmen und wir haben

$$p_{i_1 \dots i_d} = (y^{(1)} y^{(2)} \dots y^{(d)})_{i_1 \dots i_d} = \Sigma \pm y_{i_1}^{(1)} \dots y_{i_d}^{(d)} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (2)$$

Diese Grössen sind durch ganz-rationale Beziehungen untereinander verknüpft, die wir p -Relationen nennen und die in der Literatur wiederholt behandelt wurden ¹⁾.

Genauer definieren wir eine p -Relation wie folgt: G ist eine Form der $p_{ikl \dots}$, die nicht identisch Null ist, wenn die $p_{ikl \dots}$ als $\binom{n}{d}$ unabhängige Grössen betrachtet werden; die aber identisch verschwindet, wenn man die $p_{ikl \dots}$ nach (2) durch die $y_k^{(i)}$ ausdrückt. Es ist dann leicht zu zeigen, dass man G nicht nur homogen in den $p_{ikl \dots}$, sondern auch homogen in allen Indizes i voraussetzen kann.

Ein Satz von MERTENS besagt nun, dass sich jedes G in der Gestalt $G \equiv A_1 P_1 + A_2 P_2 + \dots + A_h P_h$ (identisch in den $p_{ikl \dots}$) $\cdot \cdot \cdot$ (3) darstellen lässt, wobei die A_i Formen der $p_{ikl \dots}$ sind und die $P_i = 0$ quadratische p -Relationen bedeuten ²⁾.

Letztere sind z.B. symbolisch dargestellt durch (q äquivalent mit p)

$$(p^d q \dots) q_{k_2 \dots k_d} = d! (p' q) p'_{i_2 \dots i_{n-d}} q_{k_2 \dots k_d} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (4)$$

Der Beweis von (3) kann nun wie folgt geführt werden. Es sei vorerst $d > 2$. Wir setzen in G :

$$(p^d)_{ikl \dots} = (\pi^{d-1} \xi)_{ikl \dots}, \text{ d.h. unsymbolisch}$$

$$d! p_{i_1 \dots i_d} = (d-1)! \Sigma \pm \pi_{i_1 \dots i_{d-1}} \xi_{i_d} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (5)$$

¹⁾ Zuerst von H. BAZIN, Journal de Liouville 16, 145—160 (1845).

²⁾ F. MERTENS, Monatshefte f. Math. u. Phys. 4, 328 (1893).

Ist G vom Grade m in den $p_{ikl\dots}$, so wird, wenn wir nach linear-unabhängigen Formen m -ten Grades der ξ_i ordnen:

$$G = H_1(\pi_{ikl\dots}) \cdot f_1(\xi) + H_2(\pi_{ikl\dots}) \cdot f_2(\xi) + \dots + H_\nu(\pi_{ikl\dots}) \cdot f_\nu(\xi) \quad (6)$$

G gibt bei den Substitutionen (2) Null, daher verschwindet auch die rechte Seite von (6), wenn die $\pi_{ikl\dots}$ G_{d-1} -Koordinaten sind. Also sind

$$H_i(\pi_{ikl\dots}) = 0$$

p -Relationen für G_{d-1} -Koordinaten. Gilt daher der Satz von MERTENS für $d-1$, so wird

$$H_i \equiv \sum_j B_{ij}(\pi_{ikl\dots}) \cdot \Pi_{ij} \quad (\text{identisch in den } \pi_{ikl\dots}), \quad \dots \quad (7)$$

wobei die Π_{ij} quadratische p -Relationen der $\pi_{ikl\dots}$ bedeuten.

Aus (6) wird also:

$$G((\pi^{d-1} \xi)_{ikl\dots\dots}) = \sum B_r(\pi_{ikl\dots}) \cdot \Pi_r(\pi_{ikl\dots}) \cdot f_r(\xi) \quad (8)$$

(identisch in $\pi_{ikl\dots}$ und ξ_i).

Um nun von dieser Gleichung zu (3) zu gelangen, müssen wir die Substitutionen (5) wieder rückgängig machen, d.h. je eine Reihe $\pi_{ikl\dots}$ und ξ_j durch eine Reihe willkürlicher $p_{ikl\dots}$ ersetzen. Dies kann geschehen durch Ausübung des invarianten Prozesses

$$\Omega_{\pi\xi} = \sum \pm \frac{\partial}{\partial \pi_{i_1\dots i_{d-1}} \partial \xi_{i_d}} p_{i_1\dots i_d} \quad \dots \quad (9)$$

Ist G vom Grade $m \geq 2$ in den $p_{ikl\dots}$, so hat man diesen Prozess m -mal auf (8) anzuwenden. Rechts handelt es sich dann um das Resultat, das aus den zwei Faktoren

$$U = \Pi_r(\pi_{ikl\dots}) \cdot f_r(\xi) = (\pi^{d-1} q \dots) q \dots (a' \xi)^m$$

durch zweimalige Anwendung von $\Omega_{\pi\xi}$ entsteht. Wir haben, da q mit π äquivalent ist:

$$\frac{1}{m} \Omega_{\pi\xi} U = (p^{d-1} q \dots) q \dots (p a') (a' \xi)^{m-1} + (\pi^{d-1} q \dots) q \dots (q a') (a' \xi)^{m-1}$$

$$\frac{1}{m(m-1)} \Omega_{\pi\xi}^2 U = 2 (p^{d-1} q \dots) q \dots (p a') (q a') (a' \xi)^{m-2} \quad \dots \quad (10)$$

Bringt man hier die Reihe p von (p^a) in den Klammerfaktor $(p^{d-1} q \dots)$, so entstehen wegen $(q^a)^2 = 0$ nur Glieder, die alle mit $(p^d q \dots)$ beginnen, die also (Vgl. (14)) quadratische p -Relationen für die $p_{ikl} \dots$ darstellen.

Um die Wirkung von $\Omega_{\pi\xi}^m$ auf die linke Seite von (8) zu übersehen, schreiben wir G symbolisch, wobei $A', B', \dots m$ äquivalente Reihen bedeuten:

$$G = (A' p)^d \cdot (B' q)^d \dots,$$

also

$$G((\pi^{d-1} \xi)_{ikl} \dots) = (A' \pi)^{d-1} (A' \xi) \cdot (B' \varrho)^{d-1} (B' \xi) \dots \quad (11)$$

Dann wird

$$\Omega_{\pi\xi} G = m (A' p)^d \cdot (B' \varrho)^{d-1} (B' \xi) \dots + \left. \begin{aligned} & m(m-1) (A' p)^{d-1} (A' \xi) \cdot (B' \varrho)^{d-1} (B' p) \dots + \dots \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Im zweiten Terme rechts gehen wir zu A und B über

$$\frac{1}{(n-d)!^2} (A^{n-d} p^{d-1} \xi) (B^{n-d} \varrho^{d-1} p)$$

und bringen die einzelne Reihe p des zweiten Klammerfaktors in den ersten. Dies gibt

$$\frac{1}{d} (A' p)^d (B' \varrho)^{d-1} (B' \xi) + \alpha (p^d \xi \dots) \dots$$

wo $\alpha \neq 0$ ein Zahlenfaktor. Statt (12) kommt daher:

$$\Omega_{\pi\xi} G = m \cdot \left(1 + \frac{m-1}{d}\right) \cdot (A'_p)^d (B'_\varrho)^{d-1} (B' \xi) \dots + \alpha (p^d \xi \dots) \quad (13)$$

Bei den weiteren Prozessen $\Omega_{\pi\xi}$ wird schliesslich das ξ von $(p^d \xi \dots)$ durch ein p ersetzt und ergibt also $(p^d q \dots)$, d.h. nach (4) eine quadratische p -Relation P . Aus (13) entsteht so

$$\Omega_{\pi\xi}^m G = m(m-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{m-1}{d}\right) \left(1 + \frac{m-2}{d}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{d}\right) \cdot G + \Sigma B_r P_r, \quad (14)$$

wodurch (3) bewiesen ist.

§ 2.

Der obige Induktionsschluss erfordert jetzt noch den Beweis des Satzes für $d=2$, also für Linienkoordinaten p_{ik} bei $n \geq 4$. Hier könnte man sich auf den GORDAN'schen Beweis des zweiten Fundamentalsatzes der

symbolischen Methode bei binären Formen berufen ¹⁾, der Reihenentwicklung und Induktion benutzt. Vereinfacht und losgelöst vom genannten zweiten Fundamentalsatz verläuft dieser Beweis wie folgt.

Damit $G(p_{ik})$ nicht schon für alle p_{ik} selbst verschwindet, muss $n \geq 4$ sein, d.h. wir müssen wenigstens vier verschiedene Indizes haben. Sei p_{12} in G vorhanden. Wir setzen

$$P_{ik} = p_{12} p_{ik} - p_{i2} p_{1k} + p_{i1} p_{2k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Mit Hilfe dieser quadratischen p -Relation P_{ik} kann man dann jedes Produkt $p_{12} p_{ik}$ (i und k von 1, 2 verschieden) aus G entfernen, d.h. es wird

$$G = \sum A_{ik} P_{ik} + G', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

wo die A_{ik} Formen der p_{ik} sind und in G' keine Produkte $p_{12} p_{ik}$ mehr auftreten. Wenn G' noch p_{12} enthält, so ordnen wir nach Potenzen von p_{12} :

$$G' = c_h \cdot p_{12}^h \cdot \sum p_{1i_1} \cdots p_{1i_r} \cdot p_{2k_1} \cdots p_{2k_s} + \\ + c_{h-1} \cdot p_{12}^{h-1} \cdot \sum p_{1m_1} \cdots p_{1m_r+1} \cdot p_{2n_1} \cdots p_{2n_s+1} + \cdots$$

Da G' homogen in allen Indizes ist, müssen in allen Gliedern gleich viel, nämlich $r+s$ Reihen 3, 4, ..., n vorhanden sein. Also folgt $c_{h-1} = c_{h-2} = \cdots = 0$ und G' erhält die Gestalt

$$G' = p_{12}^h \cdot \sum p_{1i_1} \cdots p_{1i_r} \cdot p_{2k_1} \cdots p_{2k_s} = p_{12}^h \cdot G'',$$

d.h. es müsste

$$G'' = \sum p_{1i_1} \cdots p_{1i_r} \cdot p_{2k_1} \cdots p_{2k_s} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

eine p -Relation sein.

Wir zeigen dass dies unmöglich ist, dass nämlich G'' dann auch schon für alle p selbst verschwindet. In G'' treten nämlich nur solche p_{ik} auf, bei denen ein Index 1 oder 2 ist. Die Gerade p_{ik} schneidet den Koordinatenraum $u'_1 = 0$ in einem Punkte y mit den Koordinaten

$$(y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 0 : p_{12} : p_{13} : \quad . \quad . \quad . \quad : p_{1n};$$

ebenso den Koordinatenraum $u'_2 = 0$ in einem Punkte z :

$$(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad p_{21} : 0 : p_{23} : \quad . \quad . \quad . \quad : p_{2n}.$$

Nehmen wir nun die Gerade p_{ik} durch diese beiden Punkte y und z als

¹⁾ GORDAN—KERSCHENSTEINER, Vorlesungen über Invariantentheorie, Leipzig, 132 (1887) und dazu E. STUDY, Ternäre Formen, Leipzig, 80 (1889).

gegeben an, so gilt $G'' = 0$ für alle y_i und z_k , d.h. auch für alle seine Argumente p_{1i} und p_{2k} .

Also kann man annehmen, dass G' in (16) keine p_{12} mehr enthält. Sei also $G'(p_{ik}) = 0$ eine p -Relation vom Grade g in den p_{ik} , homogen vom Grade m in Bezug auf den Index 1, homogen vom Grade n im Index 2. Letzteres besagt: G' wird eine binäre Form m -ten Grades in $\xi = x_1, y_1$ und n -ten Grades in $\eta = x_2, y_2$, also

$$G' = \alpha_{\xi}^m \beta_{\eta}^n.$$

Nach einer bekannten Formel aus der Theorie der binären Formen lässt sich G' so schreiben:

$$G' = c \cdot D_{\xi\eta}^m D_{\xi\eta}^n G' + \Delta \cdot (\xi\eta) \cdot \left(\frac{\partial^2 G'}{\partial \xi_1 \partial \eta_2} - \frac{\partial^2 G'}{\partial \xi_2 \partial \eta_1} \right). \quad (18)$$

Hierbei ist $c \neq 0$ ein Zahlenkoeffizient; $D_{\xi\eta}$ und $D_{\eta\xi}$ sind die Polaroperationen

$$\left. \begin{aligned} D_{\xi\eta} &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} \eta_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \eta_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial}{\partial y_1} y_2 = \sum_i \frac{\partial}{\partial p_{1i}} p_{2i} \\ D_{\eta\xi} &= \frac{\partial}{\partial \eta_1} \xi_1 + \frac{\partial}{\partial \eta_2} \xi_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} x_1 + \frac{\partial}{\partial y_2} y_1 = \sum_k \frac{\partial}{\partial p_{2k}} p_{1k} \end{aligned} \right\} \quad (i > 2, k > 2)$$

Δ ist eine zusammengesetzte Polaroperation, die sich als Polynom von $D_{\xi\eta}$ und $D_{\eta\xi}$ schreiben lässt. Schliesslich ist

$$(\xi\eta) = \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1 = p_{12}$$

und

$$\frac{\partial^2 G'}{\partial \xi_1 \partial \eta_2} - \frac{\partial^2 G'}{\partial \xi_2 \partial \eta_1} = \frac{\partial^2 G'}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 G'}{\partial x_2 \partial y_1} = \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 G'}{\partial p_{1i} \partial p_{2k}} p_{ik} \quad (i > 2, k > 2)$$

In (18) sind

$$D_{\xi\eta}^m G' = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 G'}{\partial \xi_1 \partial \eta_2} - \frac{\partial^2 G'}{\partial \xi_2 \partial \eta_1} = 0 \quad (19)$$

wieder p -Relationen. Erstere aber ohne Index 1, letztere vom Grade $g-1$ in den p_{ik} . Für beide können wir also die Giltigkeit des MERTEN'schen Satzes annehmen, sodass statt (18) kommt:

$$G' = c \cdot D_{\eta\xi}^m (\sum B_r P_r) + \Delta [p_{12} \cdot \sum C_{\lambda} P_{\lambda}] \quad (20)$$

wobei P_r und P_{λ} quadratische p -Relationen andeuten. Es ist dann leicht zu sehen, dass die Operationen $D_{\eta\xi}^m$ und Δ in (20) wieder Summen $\sum D_{\mu} P_{\mu}$ ergeben, wodurch der Satz auch für $d=2$ bewiesen ist.

Astronomy.—*Mittlere Lichtkurven von langperiodischen Veränderlichen.*
XXVII. *R Canum Venaticorum.* Von A. A. NIJLAND.

(Communicated at the meeting of March 28, 1936).

Instrumente *S* und *R*. Die Beobachtungen wurden alle auf *R* reduziert; die Reduktion *R*—*S* beträgt —0^m.29. Spektrum M 6—8e (HA 79.173). Gesamtzahl der Beobachtungen 833 (von 2416826 bis 2428219). Es wurden wieder wie in allen früheren Mitteilungen die in zwei Instrumenten angestellten Schätzungen nur einmal gezählt.

Karte: HAGEN, *Atlas Stell. var. Series III.*

Die Tabelle I gibt eine Uebersicht der benutzten Vergleichsterne. Die Sterne *A* und *a* kommen in der PD vor (6^m.56 G bzw. 7^m.80 WG—); die Sterne γ und δ wurden mitbeobachtet, um der Skala eine festere Grundlage zu verschaffen. Die Sterne *f* und *g* wurden an den Daten 2417241, 7261, 7740, 8052, 2426003 und 6038 an die Grenze von *S* angeschlossen; die sich hieraus ergebenden Helligkeiten sind: *f* = 11^m.16, *g* = 11^m.47. Wie aus der Tabelle I ersichtlich, steht die Stufenskala ausgenommen für *A* in

TABELLE I. Vergleichsterne.

*	BD	HAGEN	St.	HA 95 HA 37	PD <i>red</i>	<i>H</i>
<i>A</i>	+ 41.2434	—	55.4	6.74 K5	6.60	7.10
<i>a</i>	40.2701	1	47.8	7.82 Mb	7.65	7.82
<i>b</i>	40.2693	2	43.2	8.20 Ma	—	8.25
β	39 2676	—	37.2	8.83 G5	—	8.80
<i>c</i>	40.2695	3	32.9	9.36	—	9.21
γ	39.2685	7	28.0	9.60	—	[9.67]
<i>d</i>	40.2691	5	27.4	9.87	—	9.72
δ	40.2690	8	24.9	10.00	—	[9.95]
<i>e</i>	40.2692	9	19.8	10.54	Grenze	10.43
<i>f</i>	—	14	12.1	—	11.16	11.16
<i>g</i>	—	17	6.8	—	11.47	11.65
<i>h</i>	—	20	0.6	—	—	12.22
<i>k</i>	—	25	0.0	—	—	12.28

gutem Einklang mit den photometrischen Helligkeiten der Vergleichsterne. Sie bezieht sich auf die Grösse $10^m.0$; der Stufenwert ist $0^m.094$. Anfangs hielt ich den Stern *A*, weil im Stufenintervall *Aa* die Streuung anormal gross ist (von 4 bis 12 Stufen) für verdächtig, doch hat sich in dieser Beziehung nichts Bestimmtes herausgestellt.

Es liegen 122 Schätzungen der Farbe vor, für drei Viertel aus den Jahren 1907 bis 1914. Aus den Tabellen *Ila* und *Ilb* ist ersichtlich, dass sich die Farbe im Laufe der Jahre kaum geändert hat; ebenso wenig deutlich tritt eine Abhängigkeit von der Helligkeit zutage, sei es dann, dass sich die Farbe unterhalb der neunten Grosse etwas zu vertiefen scheint. Dass allgemeine Mittel ist $3^c.51$.

TABELLEN *Ila* und *Ilb*. Farbenschätzungen.

Zeitraum	<i>n</i>	Farbe	Grösse	<i>n</i>	Farbe
²⁴¹ 6921 — 7382	20	^c 2.83	^m 7.15	13	^c 3.58
7398 — 7859	20	3.32	7.33	13	3.46
7904 — 8559	20	3.82	7.42	12	3.21
8574 — 9589	20	3.98	7.59	12	3.25
²⁴² 9878 — 2533	21	3.52	7.79	12	2.96
2821 — 6750	21	3.60	8.07	12	3.58
			8.48	12	3.38
			8.89	12	3.33
			9.33	12	4.17
			10.03	12	4.21
	122			122	

Die Figur 1 enthält die Beobachtungen, alle auf *R* reduziert. Die Reihe der Abweichungen (Beobachtung minus Kurve) zeigt 270 Plus-, 290 Minuszeichen, 273 Nullwerte, 277 Zeichenfolgen, 282 Zeichenwechsel. Das Mittel der absoluten Werte der Abweichungen ist $0^m.083$.

Ein Einfluss des Mondscheines auf die Helligkeitsschätzung ist nicht nachweisbar. Es verteilen sich auf 262 bei Mondschein angestellte Beobachtungen die Abweichungen wie folgt: 78 Plus-, 89 Minuszeichen, 95 Nullwerte.

Die Tabelle III enthält die aus der Kurve abgelesenen Epochen der Minima *m* und der Maxima *M*. Die Spalte *R* wurde mit den Elementen:

$$2422356^d + 326^d E \text{ (für die Minima)}$$

und

$$2422512 + 326 E \text{ (für die Maxima)}$$

gerechnet; das sehr unsichere Minimum 2427595 so wie das ebenfalls

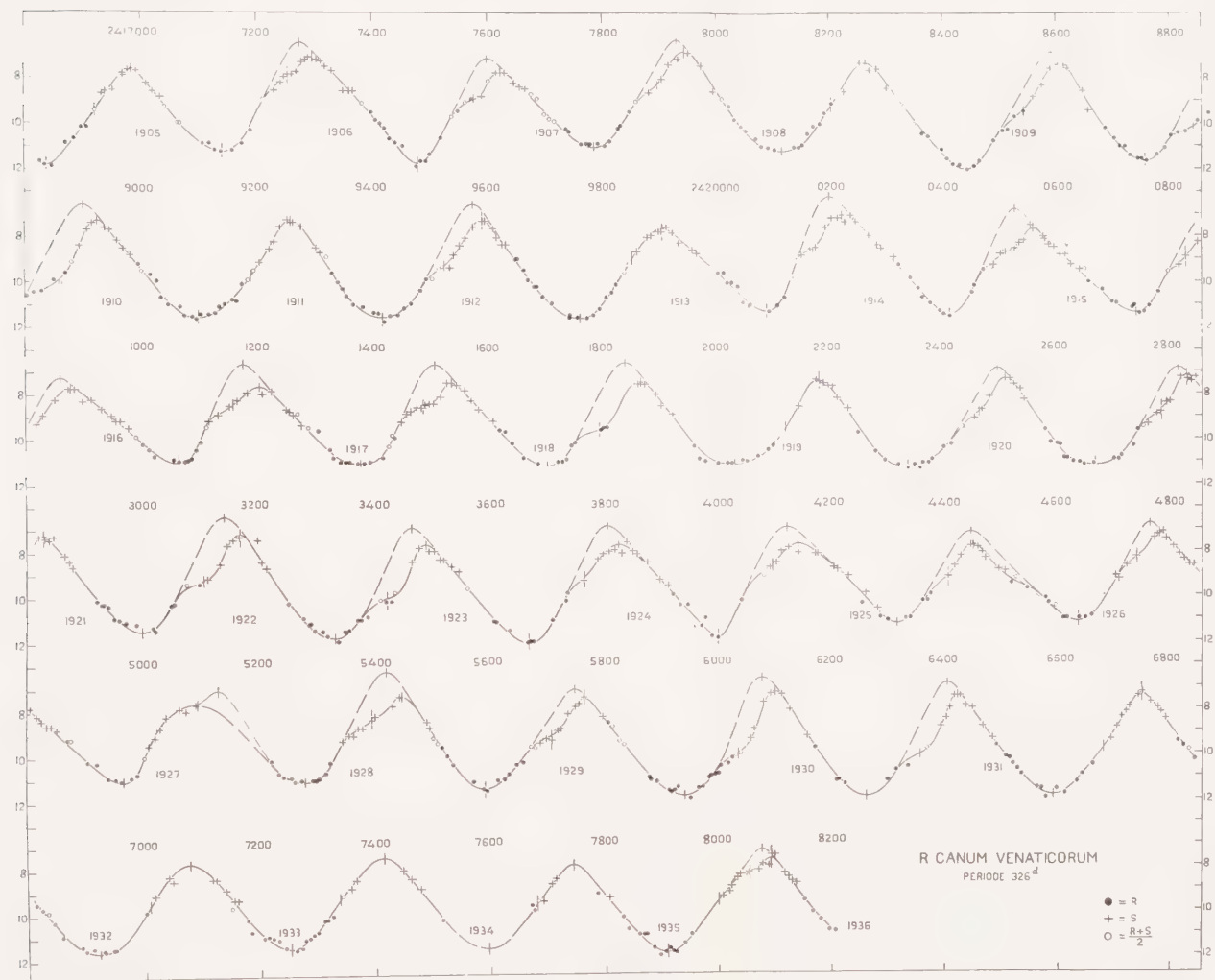


Fig 1.

TABELLE III.

E	Minima				Maxima				A	A-A ₀
	B	ν	R	B-R	B	ν	R	B-R		
-17	²⁴¹ [6838?]	11.8:	—	—	²⁴¹ 6984	^m 7.6	6970	+14	—	—
-16	7139	11.3	7140	-1	7296	7.1	7296	0	^m 4.2	+2
-15	7480	11.8	7466	+14	7623	7.8	7622	+1	4.0	0
-14	7785	11.1	7792	-7	7944	6.9	7948	-4	4.2	+2
-13	8116	11.2	8118	-2	8265	7.3	8274	-9	3.9	-1
-12	8442	12.0	8444	-2	8604	7.4	8600	+4	4.6	+6
-11	8757	11.7	8770	-13	8923	7.3	8926	-3	4.4	+4
-10	9096	11.6	9096	0	9257	7.2	9252	+5	4.4	+4
-9	9416	11.5	9422	-6	9590	7.3	9578	+12	4.2	+2
-8	9760	11.6	9748	+12	9904	7.6	9904	0	4.0	0
-7	²⁴² 0090	11.3	0074	+16	²⁴² 0222	7.0	²⁴² 0230	-8	4.3	+3
-6	0411	11.5	0400	+11	0558	7.7	0556	+2	3.8	-2
-5	0740	11.4	0726	+14	0878	7.7	0882	-4	3.7	-3
-4	1062	11.0	1052	+10	1203	7.6	1208	-5	3.9	-6
-3	1378	11.1	1378	0	1536	7.4	1534	+2	3.7	-3
-2	1702	11.2	1704	-2	1865	7.4	1860	+5	3.8	-2
-1	2030	11.1	2030	0	2180	7.3	2186	-6	3.8	-2
0	2336	11.3	2356	-20	2508	7.3	2512	-4	4.0	0
+1	2666	11.2	2682	-16	2830	7.2	2838	-8	4.0	0
+2	2998	11.5	3008	-10	3165	7.2	3164	+1	4.3	+3
+3	3330	11.8	3334	-4	3488	7.7	3490	-2	4.1	+1
+4	3668	12.0	3660	+8	3825	7.7	3816	+9	4.3	+3
+5	4000	11.8	3986	+14	4142	7.7	4142	0	4.1	+1
+6	4316	11.2	4312	+4	4452	7.7	4468	-16	3.5	-5
+7	4636	11.1	4638	-2	4780	7.2	4794	-14	3.9	-1
+8	4966	11.1	4964	+2	[5091]	[7.7?]	—	—	—	—
+9	5278	11.1	5290	-12	5445	7.4	5446	-1	3.7	-3
+10	5590	11.5	5616	-26	5764	7.5	5772	-8	4.0	0
+11	5939	11.8	5942	-3	6100	7.2	6098	+2	4.6	+6
+12	6260	[11.9?]	6268	-8	6423	7.4	6424	-1	—	—
+13	6590	11.8	6594	-4	6748	7.4	6750	-2	4.4	+4
+14	6923	11.6	6920	+3	7078	7.7	7076	+2	3.9	-1
+15	7252	11.6	7246	+6	7414	7.5	7402	+12	4.1	+1
+16	[7595]	[11.6?]	—	—	7744	7.9	7728	-4	—	—
+17	7909	11.8	7898	+11	8092	7.6	8054	+38	4.2	+2
		11.46		± 8		7.44		± 6	4.0	

unvollständig beobachtete Maximum 2425091 blieb hierbei unberücksichtigt. Ich fand aber keine Freiheit, das durch viele Beobachtungen belegte jedoch stark abweichende Maximum 8092 auszuschliessen. Die übrigbleibenden $B-R$ sind nicht sehr gross; sie zeigen aber wie gewöhnlich ein Zuviel an Zeichenfolgen. Die Periode ist sicher nicht konstant: sie wird wohl bei keinem langperiodischen Veränderlichen konstant sein. Es liesse sich vielleicht wenigstens bei den Minima durch ein Sinusglied von einer Amplitude von etwa 10^d und einer Periode von 12 Perioden eine geringe Besserung erzielen. Ich bin aber bei den einfachen Elementen R stehen geblieben. PRAGER's Katalog für 1936 gibt den Periodenwert $329^d.3$ (wohl ein Druckfehler?), und das aus sämtlichen von mir seit d. J. 1905 in den Astr. Nachr. mitgeteilten Epochen der Minima und Maxima abgeleitete allgemeine Mittel ist 326^d .

Die extremen Werte des Lichtwechsels sind:

$$\begin{array}{l} \text{Minimum: } 11^m.46 \pm 0^m.053 \\ \text{Maximum: } 7^m.44 \pm 0^m.041 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. \text{ (m.F.).}$$

Die Amplitude beträgt somit $4^m.02$. Sowohl die Minima wie die Maxima zeigen einen starken Ueberschuss von Zeichenfolgen, der bei der Reihe der Amplituden (Maximum minus vorangehendes Minimum) vielleicht noch deutlicher hervortritt: s. die Tabelle III. Es macht sich ein gewisser Parallelismus zwischen den Höhen der Maxima und den Epochen der Minima bemerkbar: auf ein verspätetes Minimum folgt ein niedriges Maximum. So besteht auch eine schwache Korrelation zwischen der Amplitude und der Höhe des Minimums; die grosse Amplitude wird scheinbar in erster Linie durch das vorangehende schwache Minimum bedingt.

Wie man sieht (Figur 1), unterliegen die meisten Aufhellungen von *R Canum Venaticorum* einer Störung, die öfters einen Stillstand im aufsteigenden Aste der Lichtkurve bildet. Der Fall ist demjenigen von *R Leonis minoris* (*Proc. Royal Acad. Amsterdam*, 35, 931) ähnlich. Den vielen unverkennbar oder sogar stark gestörten Aufstiegen (2417623, 8923, 2420222, 1536, 1865, 3165, 3488, 6100, 6423) stehen mherere Maxima gegenüber (2416984, 8265, 9257, 9904, 2422180, 6748, 7078, 7414, 7744), wo man im aufsteigenden Aste keine Spur von einer sekundären Welle antrifft. Es liess sich bei 24 von den 35 beobachteten Aufstiegen der Wendepunkt mehr oder weniger genau angeben. Das abnormale Maximum 2424452 so wie das unvollständig beobachtete Maximum 2425091 blieben hier ausser Betrachtung. Diese zwei Maxima sind in der Figur 1 durch zwei Kurvenzüge angegeben, zwischen denen sich die Wahl schwer treffen lässt.

Die Tabelle IVA gibt die Epochen dieser Wendepunkte, nebst einer Vergleichung mit den Elementen R :

$$2422454^d + 326^d E.$$

Die Helligkeit in dieser Phase des Lichtwechsels ist

$$9^m.03 \pm 0^m.065 \text{ (m.F.)},$$

doch kommt hier dem mittleren Fehler nur geringe Bedeutung zu.

TABELLE IV.

E	A Wendepunkte				B Ungestörte Maxima			
	B	ν	R	B-R	B	ν	R	B-R
-16	²⁴¹ 7254:	7.9?	7238	+16:	²⁴¹ 7275	^m 6.5	7275	0
-15	7576	9.0	7564	+12	7600	7.2	7601	-1
-14	7896	8.3	7890	+6	7930	6.4	7927	+3
-12	8542	9.5	8542	0	8592	6.9	8579	+13
-11	8843	10.2	8868	-25	8900	6.5	8905	-5
-9	9523	9.3	9520	+3	9572	6.6	9557	+15
-7	²⁴² 0170	8.5	0172	-2	²⁴² 0200	6.3	0209	-9
-6	0506	8.8	0498	+8	0526	6.8	0535	-9
-5	0830:	8.9?	0824	+6:	0860	7.2	0861	-1
-4	1156	8.4	1150	+6	1174	6.7	1187	-13
-3	1487	8.5	1476	+11	1507	6.6	1513	-6
-2	1794	9.6	1802	-8	1838	6.6	1839	-1
0	2462:	8.7?	2454	+8:	2494	6.8	2491	+3
+1	2784	8.7	2780	+4	2814	6.8	2817	-3
+2	3104	9.3	3106	-2	3138	6.4	3143	-5
+3	3420	10.1	3432	-12	3464	7.0	3469	-5
+4	3766:	9.1?	3758	+8:	3805	6.9	3795	+10
+5	4097:	8.6?	4084	+13:	4122	6.9	4121	+1
+6	[4407]	—	—	—	[4407]	7.1	4447	+1
+7	4740	8.3	4736	+4	4762	6.8	4773	-11
+9	5394	8.4	5388	+6	5418	6.3	5425	-7
+10	5706	9.1	5714	-8	5746	7.1	5751	-5
+11	6034	10.0	6040	-6	6078	6.6	6077	+1
+12	6354	10.0	6366	-12	6404	6.9	6403	+1
+17	8000:	9.5?	7996	+4:	8077	7.2	8033	+44
		^m 9.03				6.76		

Bei der in der üblichen Weise vorgenommenen Bildung der mittleren Kurve mussten natürlich auch die glatten Aufstiege ihre Rolle spielen: hier ist es ziemlich gleichgültig, wo man etwa den Wendepunkt wählt. Andererseits wurden die beiden Maxima 2424452 und 5091 auch hier ausgeschlossen.

Die drei Teilkurven schliessen sich, wie aus der Figur 2 ersichtlich, genau an einander an, und liefern zusammen die mittlere Kurve *B* (Tabelle V). Wird die Kurve wieder in den Fällen wo sich der Wendepunkt bestimmen lässt von der Störung befreit, so entstehen die unge-

TABELLE V. Lichtkurve.

Phase	ν	Phase	ν	Phase	ν	Phase	ν	Phase	ν
^d -90	^m 9.55	^d 20	^m 11.29	^d + 50	^m 10.32	^d +120	^m 8.40	^d +180	^m 7.94
-80	9.86	-10	11.40	+ 60	9.97	+130	8.05	+190	8.23
-70	10.17	0	11.46	+ 70	9.66	+140	7.68	+200	8.53
-60	10.46	+10	11.41	+ 80	9.41	+150	7.47	+210	8.83
-50	10.72	+20	11.26	+ 90	9.20	+160	7.44	+220	9.14
-40	10.94	+30	10.98	+100	8.99	+170	7.45	+230	9.46
-30	11.13	+40	10.68	+110	8.71	+180	7.67	+240	9.78

störten Maxima, welche (Tabelle IV B) mit den Elementen *R*:

$$2422491^d + 326^d E$$

verglichen wurden.

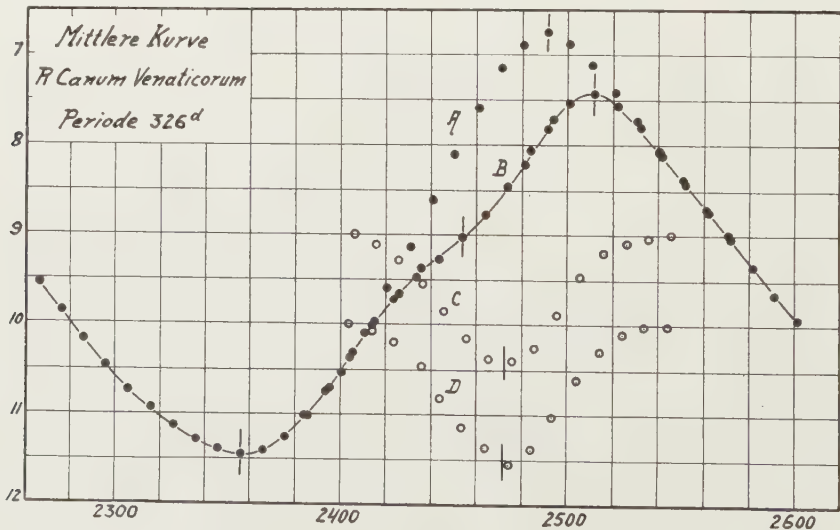


Fig. 2.

Die maximale Helligkeit wird jetzt: $\nu = 6^m.76 \pm 0^m.030$ (m.F.).

Die Teilkurve *A* der ungestörten Maxima (Figur 2) schliesst sich derjenigen der Minima genau an. Für die Schiefe der ungestörten Kurve findet man

$$\frac{M-m}{p} = 0.411.$$

Zum Schluss wurde die Differenzkurve $C = A - B$ gebildet, welche wieder so gut wie symmetrisch verläuft. Das Minimum, zu 1^m.40, fällt auf 2422473, also 18 Tage vor dem ungestörten Maximum; der Veränderliche erleidet beim Aufstieg eine Verfinsterung, welche ihn von 72 % seines Lichtes beraubt.

Die nicht seltenen vollkommen glatten Aufstiege haben mich veranlasst, auch bei diesem Stern, wie früher bei *R Leonis minoris* (*Proc. Royal Acad. Amsterdam*, **35**, 931), *S Coronae borealis* (*Proc. Royal Acad. Amsterdam*, **37**, 1) und *V 20 = ST Cygni* (*Proc. Royal Acad. Amsterdam*, **38**, 964), für die deutlich gestörten Maxima die einzelnen Differenzkurven zu bilden, und deren Minima zur Deckung zu bringen. Dann entsteht eine völlig symmetrische etwas tiefere Verdunkelungskurve *D*, deren Minimum, zu 1^m.55, auf 2472 fällt, 19 Tage vor dem ungestörten Maximum; der Lichtverlust wird jetzt 76 %. Die Auffassung, dass *R Canum Venaticorum* in gewissen Fällen bei der Aufhellung nicht gestört wird, in anderen Fällen aber um so stärker, kommt mir die wahrscheinlichere vor.

Utrecht, März 1936.

Physics. — *The transition of hexagonal α -Titanium into regular β -Titanium at a high temperature.* By J. H. DE BOER, W. G. BURGERS and J. D. FAST. (Natuurkundig Laboratorium der N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken, Eindhoven, Holland.) (Communicated by Prof. G. HOLST.)

(Communicated at the meeting of March 28, 1936).

Metallic titanium is isomorphous with zirconium; at room temperature the crystal structure is hexagonal close-packed. The parameter values¹⁾ for zirconium are $a = 3.22_3$ Å, $c = 5.12_3$ Å; for titanium $a = 2.95_3$ Å, $c = 4.72_9$ Å. The ratio between the a values at room temperature is

$$\frac{a_{Zr}}{a_{Ti}} = 1.09_1, \text{ that between the values of } c: \frac{c_{Zr}}{c_{Ti}} = 1.08_3.$$

At a higher temperature zirconium passes over into another modification²⁾, and the transition point³⁾ is at $862 \pm 5^\circ$ C. The crystal structure proved to be cubic body-centred ($a = 3.61$ Å at about 900° C.)⁴⁾. Since in the preparation of zirconium by thermal dissociation of zirconium tetraiodide⁵⁾ the deposition temperature lies far above the transition point,

1) Cf. M. C. NEUBURGER, Gitterkonstanten 1936. Z. Kristallogr. **93**, 1 (1936).

2) C. ZWIKKER, Physica **6**, 361 (1926).

3) R. VOGEL and W. TONN, Z. anorg. allgem. Chem. **202**, 292 (1931); J. H. DE BOER, P. CLAUSING and J. D. FAST, Rec. Trav. Chim. Pays-Bas (1936).

4) W. G. BURGERS, Z. anorg. allgem. Chem. **205**, 81 (1932); Nature, **129**, 281 (1932).

5) J. H. DE BOER and J. D. FAST, Z. anorg. allgem. Chem. **153**, 1 (1925); **187**, 177 (1930).

crystals of the regular β -zirconium are formed by this method. The rods obtained, which are built up of several well-formed crystals, consist therefore of the hexagonal α -zirconium at room temperature; the external form of the crystals, however, is that of β -zirconium.

Titanium can be prepared by a method analogous to that which is used for the preparation of zirconium, namely by thermal dissociation of titanium tetraiodide⁶⁾. In this case also well-formed crystals may be obtained, and several years ago we found it possible to prepare rods of mixed crystals of zirconium and titanium by simultaneous dissociation of zirconium and titanium tetraiodide⁷⁾. Under the proper conditions these rods appeared to be built up of one single crystal. On the basis of these results it seemed natural to suppose that titanium also passes over into another modification at a higher temperature, and that the β -titanium is isomorphous with β -zirconium and forms an uninterrupted series of mixed crystals with β -zirconium.

On the basis of measurements of the electrical resistance of titanium at higher temperatures SCHULZE⁸⁾ has come to the conclusion that contrary to the above expectation no polymorphous transitions occur in pure titanium. The resistance curve recorded by SCHULZE shows in fact no discontinuities. However, in his curve there is a maximum, after which the resistance decreases slowly with increasing temperature. SCHULZE ascribes this abnormal behaviour to impurities, which are taken up at higher temperatures during heating (in a porcelain tube).

From a very recent investigation with zirconium⁹⁾ we have discovered that, if zirconium is heated in air of low pressure, the discontinuous jump in the resistance at the transition temperature entirely disappears, and is replaced by a continuous change in the resistance, giving a maximum and a minimum, which may lie several hundred degrees apart. The type of the curve is like that originally found by ZWIKKER.

In a special study on the influence of oxygen and nitrogen¹⁰⁾ it appeared that resistance curves were obtained, which were quite analogous to those found by SCHULZE for the titanium rod.

In order to find out whether the presence of a transition from α -titanium to β -titanium could actually be deduced from the electrical resistance, the same measures were taken as in the investigation cited above of the $\alpha \rightarrow \beta$ transition in the case of zirconium: The resistance temperature curve was recorded of a freshly-prepared titanium rod, without the rod having been removed from the preparation tube and thus without exposure of the titanium to the air. During the preparation two separate measuring contacts, which led to the outside, were allowed to be enveloped by the

⁶⁾ A. E. VAN ARKEL and J. H. DE BOER, *Z. anorg. allgem. Chem.* **148**, 345 (1925).

⁷⁾ Cf. J. H. DE BOER and P. CLAUSING, *Physica* **10**, 267 (1930).

⁸⁾ A. SCHULZE, *Z. Metallk.* **23**, 261 (1931).

⁹⁾ J. H. DE BOER, P. CLAUSING and J. D. FAST, *Rec. Trav. Chim. Pays-Bas* (1936).

¹⁰⁾ J. H. DE BOER and J. D. FAST, *Rec. Trav. Chim. Pays-Bas* (1936).

growing rod, and were used to measure the tension in the resistance measurements.

From the values found for current and tension the corresponding values for the resistance and energy supplied were calculated. Since the energy, which has been developed in the portion of the titanium rod between the measuring contacts, is lost exclusively by radiation, we may as a first approximation consider the value of the energy supplied to be proportional to the fourth power of the temperature. In Fig. 1 the measured resistance $\left(\frac{V}{i}\right)$ is plotted against $\sqrt[4]{i \cdot V}$, which quantity, according to the above, is directly proportional to the absolute temperature. We see that titanium actually does pass over into another modification at a very definite temperature, and that the electrical resistance of this other modification, like that of zirconium in the same situation, is lower than that of the α -modification.

In various experiments, while the resistance was being recorded, the temperature was also measured by means of the optical pyrometer. On

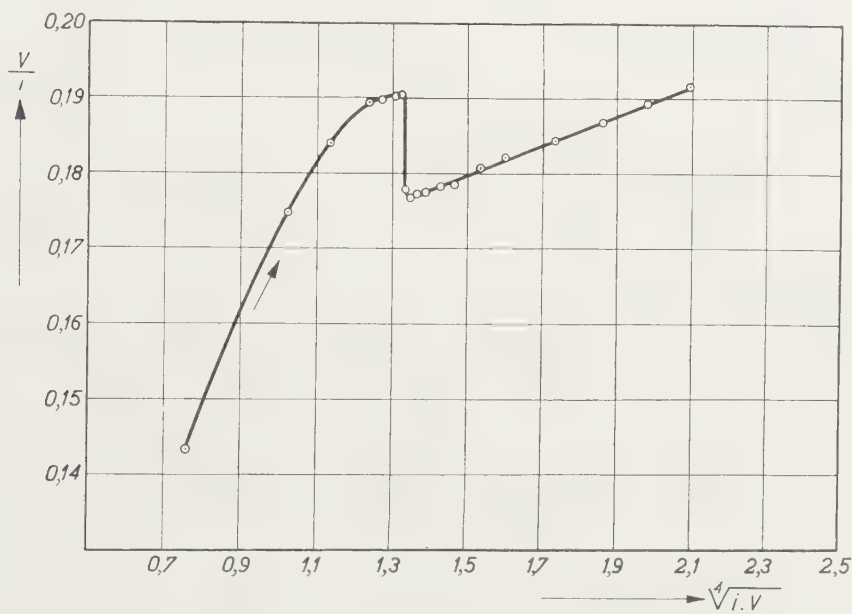


Fig. 1.

the basis of these temperature measurements we may give the value $1115 \pm 20^\circ \text{K.}$ (brightness temperature) as the average value of the transition temperature. Dr. J. VOOGD has been kind enough to determine the relation between brightness temperature and true temperature. With his corrections we obtain for the transition temperature $1155 \pm 20^\circ \text{K.}$ or $882 \pm 20^\circ \text{C.}$ It is striking that the transition temperature of titanium differs only slightly from that of zirconium ($862 \pm 5^\circ \text{C.}$).

The crystal structure of β -titanium was determined in a manner similar to that used in the determination of the structure of β -zirconium ¹¹). A titanium wire 300 μ in thickness was stretched between two nickel poles in an evacuated tube of very thin lithium-beryllium-borate glass (LINDEMANN glass). The titanium wire was kept taut at higher temperatures by means of a tungsten spiral. The glass of the tube is transparent for X-rays ($\text{Cu}-K_{\alpha}$ radiation). The tube was introduced into an ordinary DEBYE—SCHERRER camera, and could be rotated about its axis. From the relation between the resistance of the titanium wire and the heating current, that current was determined at which the titanium had just passed from the α - into the β -state, X-ray rotation photographs were taken while the wire was being heated with this current. It appeared that the β -titanium was actually cubic body-centred. The lattice constant a at 900° C. is 3.32 Å, so that the relation between the lattice constants of β -zirconium and β -titanium at 900° C.: $\frac{a_{Zr}}{a_{Ti}} = 1.08_7$ is found to be practically the same as the relation between the constants of the two α -modifications.

In a separate experiment the problem was investigated as to whether the sharp transition point is actually changed to a transition range by the taking up of a small quantity of oxygen in the case of titanium also. In fig. 2 curve a is the resistance curve of a freshly-prepared titanium rod, recorded

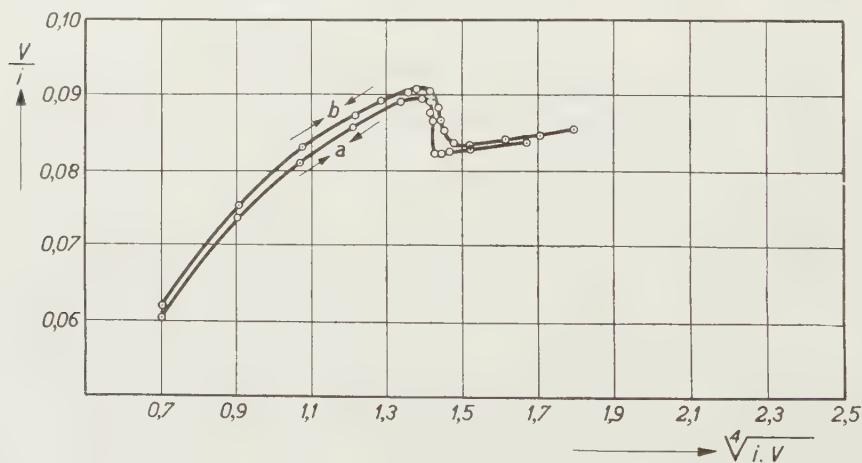


Fig. 2.

with both rising and falling temperature. Curve b is the corresponding curve after about two atom-percents of oxygen had been taken up by the rod. This curve too has been recorded for rising and falling temperatures. As with zirconium we see that the resistance rises and that a transition range at higher temperatures takes the place of a single

¹¹) W. G. BURGERS, loc. cit.

transition temperature. Thus also in this case the number of phases remains the same after the taking up of oxygen, so that the number of degrees of freedom increases by one upon addition of one component (the oxygen). After the taking up of oxygen the resistance curves for increasing and decreasing temperature practically coincide, that is, no hysteresis phenomena are observed. If, however, in addition to oxygen, nitrogen is also taken up, then titanium exhibits hysteresis phenomena as does zirconium.

Further details, not only concerning the resistance and temperature measurements, but also concerning the determination of the crystal structure of β -titanium will be published shortly elsewhere.

Eindhoven, 18th March 1936.

Mathematics. - *Einige Integraldarstellungen aus der Theorie der BESSELSchen und WHITTAKERSchen Funktionen.* (Zweite Mitteilung) ²¹⁾. Von C. S. MEIJER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of March 28, 1936).

§ 3. Spezialfälle des Satzes.

1. Integraldarstellungen für $K_\nu(z)$.

Wegen (1) gilt

$$\psi_{0,1} \left(\zeta \left| \begin{matrix} 1-a, \beta \\ b_1, b_2 \end{matrix} \right. \right) = \frac{\Gamma(a+b_1) \Gamma(a+b_2)}{\Gamma(a+\beta)} \zeta^\alpha \cdot {}_2F_1(a+b_1, a+b_2; a+\beta; -\zeta).$$

Ist $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$, dann folgt also aus (17) und (10) ²²⁾

$$K_\nu(z) = \frac{\Gamma(a+\frac{1}{2}\nu) \Gamma(a-\frac{1}{2}\nu)}{2^{2-\alpha+1} z^{2\alpha} \Gamma(a+\beta)} \int_0^\infty v^{\alpha+\beta} J_{\alpha+\beta-1}(v) \times {}_2F_1 \left(a+\frac{1}{2}\nu, a-\frac{1}{2}\nu; a+\beta; -\frac{v^2}{z^2} \right) dv. \quad (48)$$

Hierin sind α und β beliebige Zahlen mit

$$\Re(a-\beta \pm \nu) > -\frac{1}{2}, \quad \Re(a+\beta) > 0, \quad \alpha \pm \frac{1}{2}\nu \neq 0.$$

²¹⁾ Erste Mitteilung: Proc. Royal Acad. Amsterdam, **39**, 394–403 (1936).

²²⁾ Ich setze $u = \frac{1}{2}\nu$ in (10).

Formel (48) gilt wegen (17) und (10), falls ν nicht ganz ist. Durch Grenzübergang findet man aber, dass (48) auch gilt für ganze Werte von ν . Analog bei (55), (56), (57), (60), (65) und (66).

Nun hat man ²³⁾

$$\left(\frac{\pi v}{2}\right)^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(v) = \cos v$$

und

$$\left(\frac{\pi v}{2}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(v) = \sin v. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Ferner gilt ²⁴⁾

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2} + \sigma, \frac{1}{2} - \sigma; \frac{1}{2}; -\sinh^2 t\right) \cosh t = \cosh 2\sigma t \quad . \quad . \quad (50)$$

und

$$2\sigma \cdot {}_2F_1\left(1 + \sigma, 1 - \sigma; \frac{3}{2}; -\sinh^2 t\right) \sinh t \cosh t = \sinh 2\sigma t. \quad . \quad (51)$$

Aus (48) mit $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$ und $v = z \sinh t$ ergibt sich somit ²⁵⁾

$$K_\nu(z) \cos \frac{1}{2}\nu\pi = \int_0^\infty \cos(z \sinh t) \cosh \nu t \, dt. \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Ebenso folgt aus (48) mit $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$ und $v = z \sinh t$, falls $|\Re(\nu)| < 1$ und $z > 0$ ist,

$$K_\nu(z) \sin \frac{1}{2}\nu\pi = \int_0^\infty \sin(z \sinh t) \sinh \nu t \, dt.$$

Relation (52) ist schon von Herrn WATSON bewiesen worden ²⁶⁾.

Setzt man $\beta = \frac{1}{2}\nu$ in (48), dann erhält man ²⁷⁾

$$K_\nu(z) = \frac{\Gamma(a - \frac{1}{2}\nu)}{2^{\frac{1}{2}\nu - \alpha + 1} z^\nu} \int_0^\infty v^{\frac{1}{2}\nu + \alpha} J_{\frac{1}{2}\nu + \alpha - 1}(v) (v^2 + z^2)^{\frac{1}{2}\nu - \alpha} dv. \quad . \quad (53)$$

Hierin ist α eine beliebige Zahl mit

$$\Re(a + \frac{1}{2}\nu) > 0, \quad \Re(a - \frac{3}{2}\nu) > -\frac{1}{2}, \quad a - \frac{1}{2}\nu \neq 0.$$

Auch Formel (53) kommt bei Herrn WATSON vor ²⁸⁾.

²³⁾ WATSON, [16], S. 55, Formel (6) und S. 54, Formel (3).

²⁴⁾ Man vergl. MEIJER, [11], S. 49.

²⁵⁾ Ich nehme an, dass $z > 0$ und $|\Re(\nu)| < 1$ ist.

²⁶⁾ WATSON, [16], S. 183, Formel (13).

²⁷⁾ Denn man hat

$${}_2F_1\left(a, \lambda; a; -\frac{v^2}{z^2}\right) = z^{2\lambda} (v^2 + z^2)^{-\lambda}.$$

²⁸⁾ WATSON, [16], S. 434, Formel (2). WATSON ersetzt v durch $v - \mu$, z durch ak , v durch ax und a durch $\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu + 1$.

2. Integraldarstellungen für $W_{k,m}(z)$ und $W_{k,m}(z)W_{-k,m}(z)$.

Man hat wegen (1)²⁹⁾

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{2,1} \left(\zeta \left| \begin{array}{c} 1-\alpha, c_2, c_3, c_4 \\ b_1, b_2, b_3, b_4 \end{array} \right. \right) &= \frac{\prod_{h=1}^4 \Gamma(\alpha + b_h)}{\prod_{h=2}^4 \Gamma(\alpha + c_h)} \zeta^\alpha \\ &\times {}_4F_3(\alpha + b_1, \alpha + b_2, \alpha + b_3, \alpha + b_4; \alpha + c_2, \alpha + c_3, \alpha + c_4; -\zeta). \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Aus (18) und (10) ergibt sich also, falls $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ ist, (ich setze $u = \frac{1}{2}v$ in (10))

$$\left. \begin{aligned} W_{k,m}(z) &= \frac{z^{-2\alpha+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}z} \Gamma(2\alpha+m) \Gamma(2\alpha-m)}{2^{\alpha+\frac{1}{2}} \Gamma(2\alpha-k+\frac{1}{2}) \Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} \int_0^\infty v^{\alpha+\frac{1}{2}} J_{\alpha+\frac{1}{2}-1}(v) \\ &\times {}_4F_3 \left(\alpha + \frac{1}{2}m, \alpha + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}, \alpha - \frac{1}{2}m, \alpha - \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}; \right. \\ &\quad \left. \alpha - \frac{1}{2}k + \frac{1}{4}, \alpha - \frac{1}{2}k + \frac{3}{4}, \alpha + \beta; -\frac{v^2}{z^2} \right) dv. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Hierin sind α und β beliebige Zahlen mit

$$\Re(\alpha - \beta \pm m) > -\frac{1}{2}, \quad \Re(\alpha + \beta) > 0, \quad 2\alpha \pm m \neq 0.$$

Auf analoge Weise findet man mit Hilfe von (19) und (10)

$$\left. \begin{aligned} W_{k,m}(z) \cdot W_{-k,m}(z) &= \frac{z^{-2\alpha+1} \Gamma(2\alpha) \Gamma(\alpha+m) \Gamma(\alpha-m)}{2^{\alpha+\frac{1}{2}} \Gamma(\alpha+k+\frac{1}{2}) \Gamma(\alpha-k+\frac{1}{2}) \Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^\infty v^{\alpha+\frac{1}{2}} J_{\alpha+\frac{1}{2}-1}(v) \\ &\times {}_4F_3 \left(\alpha, \alpha + \frac{1}{2}, \alpha + m, \alpha - m; \alpha + k + \frac{1}{2}, \alpha - k + \frac{1}{2}, \alpha + \beta; -\frac{v^2}{z^2} \right) dv. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Hierin sind α und β beliebige Zahlen mit

$$\Re(\alpha - \beta \pm 2m) > -\frac{1}{2}, \quad \Re(\alpha + \beta) > 0, \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha \pm m \neq 0.$$

Ich nehme nun an, dass $|\Re(m)| < \frac{1}{4}$ ist. Ich darf dann $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ in (56) setzen; ich finde dann

$$\begin{aligned} W_{k,m}(z) W_{-k,m}(z) &= \frac{\pi}{2 \Gamma(1+k) \Gamma(1-k) \cos m\pi} \int_0^\infty v J_0(v) \\ &\times {}_3F_2 \left(\frac{1}{2} + m, \frac{1}{2} - m, \frac{1}{2}; 1+k, 1-k; -\frac{v^2}{z^2} \right) dv. \end{aligned}$$

²⁹⁾ Ist $\alpha + c_h = 0, -1, -2, \dots$, so bekommt die rechte Seite von (54) einen Sinn durch einen Grenzübergang; man vergl. Fußnote ⁵⁾.

Das Produkt $W_{k,m}(z) W_{-k,m}(z)$ besitzt daher mit Rücksicht auf (35) (mit $\nu=m$, $\lambda=k$ und $w=\frac{v}{z}$ angewendet), falls $|\Re(m)| < \frac{1}{4}$ und $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ ist, die folgende, interessante Integraldarstellung³⁰⁾

$$W_{k,m}(z) W_{-k,m}(z) = \frac{\pi}{2 \cos m\pi} \int_0^\infty J_0(v) P_m^{k-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1 + \frac{v^2}{z^2}} \right) P_m^{k-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1 + \frac{v^2}{z^2}} \right) v dv.$$

3. Integraldarstellungen für $K_\nu(z) K_\mu(z)$.

Aus (20), (10) und (54) folgt, falls $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ ist,

$$K_\nu(z) K_\mu(z) = \frac{\Gamma(a + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu) \Gamma(a + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu) \Gamma(a - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu) \Gamma(a - \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu)}{2^{1-2\alpha} z^{2\alpha} \Gamma(2\alpha) \Gamma(a + \beta)} \times \int_0^\infty u^{\alpha+\beta} J_{\alpha+\beta-1}(2u) \cdot {}_4F_3 \left(\alpha + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu, \alpha + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu, \alpha - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu, \alpha - \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu; \right. \\ \left. a, a + \frac{1}{2}, a + \beta; -\frac{u^2}{z^2} \right) du. \quad (57)$$

Hierin sind α und β beliebige Zahlen mit

$$\Re(a - \beta + \nu \pm \mu) > -\frac{1}{2}, \quad \Re(a - \beta - \nu \pm \mu) > -\frac{1}{2}, \quad \Re(a + \beta) > 0, \\ \alpha + \frac{1}{2}\nu \pm \frac{1}{2}\mu \neq 0, \quad \alpha - \frac{1}{2}\nu \pm \frac{1}{2}\mu \neq 0.$$

Nimmt man nun $\mu = \nu$, bzw. $\mu = \nu + 1$ in (57), dann bekommt man

$$K_\nu^2(z) = \frac{\Gamma(a + \nu) \Gamma(a - \nu) \Gamma^2(a)}{2^{1-2\alpha} z^{2\alpha} \Gamma(2\alpha) \Gamma(a + \beta)} \int_0^\infty u^{\alpha+\beta} J_{\alpha+\beta-1}(2u) \times {}_3F_2 \left(\alpha + \nu, \alpha - \nu, a; \alpha + \frac{1}{2}, a + \beta; -\frac{u^2}{z^2} \right) du \quad (58)$$

(wo $\Re(a - \beta \pm 2\nu) > -\frac{1}{2}$, $\Re(a + \beta) > 0$, $\alpha \pm \nu \neq 0$ und $\alpha \neq 0$ ist), bzw.

$$K_\nu(z) K_{\nu+1}(z) = \frac{\Gamma(a + \nu + \frac{1}{2}) \Gamma(a - \nu - \frac{1}{2}) \Gamma(a - \frac{1}{2}) \Gamma(a + \frac{1}{2})}{2^{1-2\alpha} z^{2\alpha} \Gamma(2\alpha) \Gamma(a + \beta)} \int_0^\infty u^{\alpha+\beta} J_{\alpha+\beta-1}(2u) \times {}_3F_2 \left(\alpha + \nu + \frac{1}{2}, \alpha - \nu - \frac{1}{2}, a - \frac{1}{2}; a, a + \beta; -\frac{u^2}{z^2} \right) du \quad (59)$$

³⁰⁾ Eine verwandte Integralformel für $W_{k,m}(iz) W_{k,m}(-iz)$ ist Relation (71) von [14].

(wo $\Re(\alpha - \beta + 2\nu) > -\frac{3}{2}$, $\Re(\alpha - \beta - 2\nu) > \frac{1}{2}$, $\Re(\alpha - \beta) > \frac{1}{2}$, $\Re(\alpha + \beta) > 0$, $\alpha \pm (\nu + \frac{1}{2}) \neq 0$ und $\alpha \neq \frac{1}{2}$ ist).

Ist $|\Re(\nu)| < \frac{1}{4}$, so darf ich $\alpha = \beta = \frac{1}{2} - \lambda$ in (58) setzen (λ ist also eine beliebige Zahl mit $\Re(\lambda) < \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2} - \lambda \pm \nu \neq 0$). Ich erhalte dann wegen (34) (mit $w = \frac{u}{z}$ angewendet)

$$K_\nu^2(z) = \frac{\pi \Gamma(\frac{1}{2} - \lambda + \nu) \Gamma(\frac{1}{2} - \lambda - \nu)}{z} \int_0^\infty J_{-2\lambda}(2u) \left\{ P_{\nu - \frac{1}{2}}^\lambda \left(\sqrt{1 + \frac{u^2}{z^2}} \right) \right\}^2 u du.$$

Ist $|\Re(\nu)| < \frac{3}{4}$, so darf ich $\alpha - 1 = \beta = -\lambda$ in (58) setzen (λ ist nun eine beliebige Zahl mit $\Re(\lambda) < \frac{1}{2}$ und $1 - \lambda \pm \nu \neq 0$). Ich erhalte dann wegen (32)

$$K_\nu^2(z) = \frac{\pi \Gamma(1 - \lambda + \nu) \Gamma(1 - \lambda - \nu)}{z} \int_0^\infty J_{-2\lambda}(2u) \\ \times P_{\nu - \frac{1}{2}}^{\lambda - \frac{1}{2}} \left(\sqrt{1 + \frac{u^2}{z^2}} \right) P_{\nu + \frac{1}{2}}^{\lambda + \frac{1}{2}} \left(\sqrt{1 + \frac{u^2}{z^2}} \right) \frac{u du}{\sqrt{z^2 + u^2}}.$$

Ist $-\frac{5}{4} < \Re(\nu) < \frac{1}{4}$, so darf ich $\alpha - 1 = \beta = -\lambda$ in (59) setzen (λ ist jetzt eine beliebige Zahl mit $\Re(\lambda) < \frac{1}{2}$, $\frac{3}{2} - \lambda + \nu \neq 0$ und $\frac{1}{2} - \lambda - \nu \neq 0$). Ich erhalte dann wegen (33)

$$K_\nu(z) K_{\nu+1}(z) = \frac{\pi \Gamma(\frac{3}{2} - \lambda + \nu) \Gamma(\frac{1}{2} - \lambda - \nu)}{z} \int_0^\infty J_{-2\lambda}(2u) \\ \times P_{\nu - \frac{1}{2}}^\lambda \left(\sqrt{1 + \frac{u^2}{z^2}} \right) P_{\nu + \frac{1}{2}}^\lambda \left(\sqrt{1 + \frac{u^2}{z^2}} \right) \frac{u du}{\sqrt{z^2 + u^2}}.$$

Ist $|\Re(\nu)| < \frac{3}{4}$ und $z > 0$, dann darf ich $\alpha = 1$, $\beta = 0$ und $u = z \sinh t$ (mit $t \geq 0$) in (58) setzen. Ich erhalte dann wegen (51) (mit $\sigma = \nu$ angewendet)

$$K_\nu^2(z) \sin \nu \pi = \pi \int_0^\infty J_0(2z \sinh t) \sinh 2\nu t dt.$$

4. Integraldarstellungen für $I_\nu(z) K_\mu(z)$.

Ist $|\arg z| < \frac{1}{2} \pi$ dann ergibt sich aus (21), (10) und (1)

$$\begin{aligned}
I_\nu(z) K_\mu(z) &= \frac{1}{z} \int_0^\infty u^{\beta-\alpha+1} J_{\alpha+\beta-1}(2u) \\
&\times \left\{ \frac{2^{2\alpha} \Gamma(1-2\alpha) \Gamma(\alpha+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu) \Gamma(\alpha+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu) u^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+\beta) \Gamma(1-\alpha+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu) \Gamma(1-\alpha+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu) z^{2\alpha-1}} \right. \\
&\times {}_4F_3\left(\alpha+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu, \alpha+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu, \alpha-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu, \alpha-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu; \right. \\
&\quad \left. \alpha, \alpha+\frac{1}{2}, \alpha+\beta; -\frac{u^2}{z^2}\right) \\
&+ \frac{(\mu^2-\nu^2) \Gamma(\alpha-1) u}{2 \Gamma(\beta+1) z} {}_4F_3\left(1+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu, 1+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu, 1-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu, 1-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu; \right. \\
&\quad \left. 2-\alpha, \frac{3}{2}, \beta+1; -\frac{u^2}{z^2}\right) \\
&+ \frac{\Gamma(\alpha-\frac{1}{2})}{\Gamma(\beta+\frac{1}{2})} {}_4F_3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu; \right. \\
&\quad \left. \frac{3}{2}-\alpha, \frac{1}{2}, \beta+\frac{1}{2}; -\frac{u^2}{z^2}\right) \Big\} du. \quad (60)
\end{aligned}$$

Hierin sind α und β beliebige Zahlen mit

$$\Re(\alpha-\beta+\nu \pm \mu) > -\frac{1}{2}, \quad \Re(\alpha+\beta) > 0, \quad \Re(\beta) > -\frac{1}{2},$$

$$2\alpha \text{ nicht ganz, } \alpha + \frac{1}{2}\nu \pm \frac{1}{2}\mu \neq 0.$$

Die drei folgenden Spezialfälle von (60) sind besonders erwähnenswert:

A. Ich nehme an, dass $\Re(\nu) > -\frac{1}{4}$ ist. Ich darf dann $\mu = \nu$ und $\alpha = \beta = \frac{1}{2} - \lambda$ in (60) setzen (λ ist eine beliebige Zahl mit $\Re(\lambda) < \frac{1}{2}$, $\lambda \neq 0, -1, -2, \dots$ und $\frac{1}{2} - \lambda + \nu \neq 0$). Ich finde dann

$$\begin{aligned}
I_\nu(z) K_\nu(z) &= -\frac{1}{\lambda z} \int_0^\infty u J_{-2\lambda}(2u) \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda+\nu) \Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda+\nu) \Gamma(-\lambda)} \left(\frac{2z}{u}\right)^{2\lambda} \right. \\
&\times {}_3F_2\left(\frac{1}{2}-\lambda+\nu, \frac{1}{2}-\lambda-\nu, \frac{1}{2}-\lambda; 1-\lambda, 1-2\lambda; -\frac{u^2}{z^2}\right) \\
&+ {}_3F_2\left(\frac{1}{2}+\nu, \frac{1}{2}-\nu, \frac{1}{2}; 1+\lambda, 1-\lambda; -\frac{u^2}{z^2}\right) \Big\} du,
\end{aligned}$$

so dass aus (36) folgt ³¹⁾

$$\begin{aligned}
I_\nu(z) K_\nu(z) &= \frac{2 e^{-\lambda \pi i} \Gamma(\frac{1}{2}-\lambda+\nu)}{z \Gamma(\frac{1}{2}+\lambda+\nu)} \int_0^\infty J_{-2\lambda}(2u) \left(\dots \right. \\
&\times P_{\nu-\frac{1}{2}}^\lambda \left(\sqrt{1+\frac{u^2}{z^2}} \right) Q_{\nu-\frac{1}{2}}^\lambda \left(\sqrt{1+\frac{u^2}{z^2}} \right) u du. \Big) \quad (61)
\end{aligned}$$

³¹⁾ Formel (61) gilt aus Stetigkeitsgründen auch, falls $\lambda = 0, -1, -2, \dots$ ist (siehe (27) und (29)).

B. Ist $\Re(\nu + 2\mu) > -\frac{3}{2}$, $\Re(\nu) > -1$, $\Re(\nu - \mu) > -1$ und $\nu + \mu$ nicht ganz, so darf ich $\alpha = 1 + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu$ und $\beta = \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu$ in (60) setzen. Ich erhalte dann ³²⁾

$$\left. \begin{aligned} I_\nu(z) K_\mu(z) &= \frac{1}{z} \int_0^\infty u^{-\mu} J_\nu(2u) \left\{ -\frac{2 \Gamma(1 + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu) u}{\Gamma(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu) z} \right. \\ &\times {}_2F_1\left(1 + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu, 1 - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu; \frac{3}{2}; -\frac{u^2}{z^2}\right) \\ &\left. + \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu)} {}_2F_1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu; \frac{1}{2}; -\frac{u^2}{z^2}\right) \right\} du. \end{aligned} \right\} (62)$$

Die Funktion $I_\nu(z) K_\mu(z)$ besitzt daher mit Rücksicht auf (30) (mit $n = \nu - \frac{1}{2}$, $m = \mu + \frac{1}{2}$ und $v = \frac{u}{z}$ angewendet) die Integraldarstellung ³³⁾

$$I_\nu(z) K_\mu(z) = \frac{e^{(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu)\pi i}}{2^{\mu - \frac{1}{2}} z \sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^{-\mu} J_\nu(2u) \left(1 + \frac{u^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}} Q_{\nu - \frac{1}{2}}^{\mu + \frac{1}{2}}\left(\pm \frac{iu}{z}\right) du. \quad (63)$$

Aus der Theorie der analytischen Fortsetzung geht hervor (siehe (24), (30), (25) und (29)), dasz (63) gilt, falls $\Re(\nu + 2\mu) > -\frac{3}{2}$, $\Re(\nu - \mu) > -1$ und $\nu + \mu \neq -1$ ist ³⁴⁾.

C. Ich nehme an, dasz $\Re(\nu - \mu) > -\frac{3}{2}$, $\Re(\nu + \mu) > -1$, $\nu + \mu \neq 0, 1, 2, \dots$ und $\nu \neq -1$ ist. Ich darf dann $\alpha = 1 + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu$ und $\beta = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu$ in (60) setzen; ich finde dann

$$\left. \begin{aligned} I_\nu(z) K_\mu(z) &= \frac{1}{z} \int_0^\infty J_{\nu+\mu}(2u) \left\{ (\mu - \nu) \cdot {}_2F_1\left(1 + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu, 1 - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu; \frac{3}{2}; -\frac{u^2}{z^2}\right) \frac{u}{z} \right. \\ &\left. + {}_2F_1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu; \frac{1}{2}; -\frac{u^2}{z^2}\right) \right\} du. \end{aligned} \right\} (64)$$

Diese Beziehung gilt aus Stetigkeitsgründen auch, falls $\nu + \mu = 0, 1, 2, \dots$ und falls $\nu = -1$ ist; der Spezialfall mit $\mu = \nu$ kommt schon bei Herrn WATSON vor ³⁵⁾.

³²⁾ Der Spezialfall mit $\mu = \nu$ von (62) ist schon von Herrn WATSON ([16], S. 435, Formel (4)) gegeben worden.

³³⁾ Verwandte Integraldarstellungen für $K_\nu(z) K_\mu(z)$ und $H_\nu^{(1)}(z) H_\mu^{(2)}(z)$ kommen vor in den §§ 4 und 5 meiner Arbeit [14].

³⁴⁾ Die Funktion $Q_{\nu - \frac{1}{2}}^{\mu + \frac{1}{2}}(\pm i v)$ hat keinen Sinn, falls $\nu + \mu = -1, -2, -3, \dots$ ist (siehe (29) und (30)); aus $\Re(\nu + 2\mu) > -\frac{3}{2}$, $\Re(\nu - \mu) > -1$ folgt schon, dasz $\Re(\nu + \mu) > -\frac{4}{3}$ ist, so dasz ich nur $\nu + \mu \neq -1$ anzunehmen brauche.

³⁵⁾ WATSON, [16], S. 435, Formel (3).

Ist $z > 0$, so kann ich $u = z \sinh t$ (mit $t \geq 0$) in (64) setzen; ich erhalte dann wegen (50) und (51) (mit $\sigma = \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu$ angewendet)

$$I_\nu(z) K_\mu(z) = \int_0^\infty J_{\nu+\mu}(2z \sinh t) e^{(\mu-\nu)t} dt.$$

Diese Relation ist auf andre Weise von DIXON und FERRAR bewiesen worden ³⁶⁾.

5. Integraldarstellungen für $I_{-\nu}(z) - \mathbf{L}_\nu(z)$ und $I_\nu(z) - \mathbf{L}_\nu(z)$.

Ist $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$, dann folgt aus (22), (10) und (1) (ich setze $u = \frac{1}{2}\nu$ in (10))

$$\begin{aligned} I_{-\nu}(z) - \mathbf{L}_\nu(z) = & 2^{\alpha-\beta} \int_0^\infty v^{\beta-\alpha} J_{\alpha+\beta-1}(v) \left\{ \frac{v^{2\alpha} z^{-2\alpha} \Gamma(\alpha - \frac{1}{2}\nu) \cos \nu\pi}{\Gamma(1-\alpha-\frac{1}{2}\nu) \Gamma(\alpha+\beta) \cos(\alpha\pi + \frac{1}{2}\nu\pi)} \right. \\ & \times {}_2F_1\left(\alpha + \frac{1}{2}\nu, \alpha - \frac{1}{2}\nu; \alpha + \beta; -\frac{v^2}{z^2}\right) + \frac{v^{1-\nu} z^{\nu-1} \Gamma(\alpha + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2} + \nu) \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\nu + \beta)} \\ & \left. \times {}_3F_2\left(\frac{1}{2} - \nu, 1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\nu - \alpha, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\nu + \beta; -\frac{v^2}{z^2}\right) \right\} dv. \end{aligned} \quad (65)$$

Hierin sind α und β beliebige Zahlen mit

$$\Re(\alpha - \beta - \nu) > -\frac{1}{2}, \quad \Re(\alpha - \beta + \nu) > -\frac{3}{2}, \quad \Re(\alpha + \beta) > 0, \\ \Re(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\nu + \beta) > 0, \quad \alpha + \frac{1}{2}\nu \neq -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \alpha - \frac{1}{2}\nu \neq 0.$$

Auf analoge Weise ergibt sich aus (23), (10) und (1)

$$\begin{aligned} I_\nu(z) - \mathbf{L}_\nu(z) = & 2^{\alpha-\beta} \int_0^\infty v^{\beta-\alpha} J_{\alpha+\beta-1}(v) \left\{ \frac{v^{2\alpha} z^{-2\alpha} \Gamma(\alpha + \frac{1}{2}\nu)}{\Gamma(1-\alpha+\frac{1}{2}\nu) \Gamma(\alpha+\beta) \cos(\alpha\pi + \frac{1}{2}\nu\pi)} \right. \\ & \times {}_2F_1\left(\alpha + \frac{1}{2}\nu, \alpha - \frac{1}{2}\nu; \alpha + \beta; -\frac{v^2}{z^2}\right) + \frac{v^{1-\nu} z^{\nu-1} \Gamma(\alpha + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2} + \nu) \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\nu + \beta)} \\ & \left. \times {}_3F_2\left(\frac{1}{2} - \nu, 1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\nu - \alpha, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\nu + \beta; -\frac{v^2}{z^2}\right) \right\} dv. \end{aligned} \quad (66)$$

Hierin sind α und β beliebige Zahlen mit

$$\Re(\alpha - \beta + \nu) > -\frac{1}{2}, \quad \Re(\alpha + \beta) > 0, \quad \Re(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\nu + \beta) > 0, \\ \alpha + \frac{1}{2}\nu \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, \alpha + \frac{1}{2}\nu \neq 0.$$

³⁶⁾ DIXON and FERRAR, [7], S. 145.

Setzt man nun $\alpha = 1 - \frac{1}{2}\nu$ und $\beta = -\frac{1}{2}\nu$, bezw. $\alpha = 1 - \frac{1}{2}\nu$ und $\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu$ in (65) (ich nehme an, dass $-\frac{5}{2} < \Re(\nu) < \frac{1}{2}$, bezw. $\Re(\nu) < \frac{1}{2}$ ist), dann bekommt man ³⁷⁾

$$I_{-\nu}(z) - \mathbf{L}_{\nu}(z) = \frac{2z^{\nu+1} \cos \nu\pi}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{v^{-\nu} J_{-\nu}(v) dv}{v^2 + z^2},$$

bezw.

$$I_{-\nu}(z) - \mathbf{L}_{\nu}(z) = \frac{2^{1-\nu} z^{-\nu}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2} + \nu)} \int_0^{\infty} \frac{\sin v dv}{(v^2 + z^2)^{\frac{1}{2} + \nu}}. \quad \dots \quad (67)$$

Ebenso findet man, wenn man $\alpha = 1 + \frac{1}{2}\nu$ und $\beta = \frac{1}{2}\nu$, bezw. $\alpha = 1 + \frac{1}{2}\nu$ und $\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu$ setzt in (66) (ich nehme jetzt an, dass $\Re(\nu) > -1$ und $\nu \neq -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ ist),

$$I_{\nu}(z) - \mathbf{L}_{\nu}(z) = \frac{2z^{\nu+1}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{v^{-\nu} J_{\nu}(v) dv}{v^2 + z^2}, \quad \dots \quad (68)$$

bezw.

$$I_{\nu}(z) - \mathbf{L}_{\nu}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{\nu} \int_0^{\infty} \frac{v^{\frac{1}{2}-\nu} J_{\nu+\frac{1}{2}}(v) dv}{(v^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad \dots \quad (69)$$

Aus der Theorie der analytischen Fortsetzung folgt (siehe (24) und (25)), dass (68) gilt für alle Werte von ν mit $\Re(\nu) > -\frac{5}{2}$. Durch Grenzübergang findet man, dass Relation (69) auch gilt, falls $\nu = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ ist. Die Beziehungen (67) und (68) sind schon von Herrn WATSON gegeben worden ³⁸⁾.

$$^{37)} \quad {}_3F_2\left(a, b, c; a, b; -\frac{v^2}{z^2}\right) = z^{2c} (v^2 + z^2)^{-c};$$

ich benutze ferner Formel (49).

³⁸⁾ WATSON, [16], S. 332, Formel (6) und S. 426, Formel (11).

Mathematics. — *Das Komitantensystem einer kubischen und zweier kwadratischen binären Formen* ¹⁾. By C. A. SPIERENBURG. (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK).

(Communicated at the meeting of March 28, 1936).

In ähnlicher Weise, wie es von P. GORDAN für eine kubische und eine kwadratische Form ausgeführt wurde ²⁾, kann man obiges System durch Ueberschiebung zweier vollständiger Systeme erhalten.

Seien

$$f = a_x^2 = b_x^2 = c_x^2 = \dots,$$

$$g = m_x^2 = n_x^2 = l_x^2 = \dots,$$

$$\varphi = \alpha_x^3 = \beta_x^3 = \gamma_x^3 = \dots,$$

die gegebenen Grundformen.

Man hat dann das Simultansystem (U) der Formen f und g mit dem System (V) der Form φ zu überschieben.

Bekanntlich umfasst das System (U) die Formen;

$$f = a_x^2$$

$$g = m_x^2$$

$$A_{ff} = (f, f)^{(2)} = (ab)^2$$

$$A_{gg} = (g, g)^{(2)} = (mn)^2$$

$$\delta = (f, g)^{(1)} = (am) a_x m_x = \delta_x^2 = \delta'_x{}^2 = \delta''_x{}^2 = \dots,$$

$$A_{fg} = (f, g)^{(2)} = (am)^2.$$

während das System (V) die Formen:

$$\varphi = \alpha_x^3 \quad \Delta = (\varphi, \varphi)^{(2)} = (a\beta)^2 a_x \beta_x = \Delta_x^2 = \Delta'_x{}^2 = \Delta''_x{}^2 = \dots,$$

$$Q = (\varphi, \Delta)^{(1)} = (a\Delta) \alpha_x^2 \Delta_x = Q_x^3 = Q'_x{}^3 = Q''_x{}^3 = \dots$$

$$A_{\Delta\Delta} = (\Delta, \Delta)^{(2)} = (\Delta\Delta')^2.$$

enthält.

Man bekommt nun das gesuchte System durch Aufstellung aller irreduziblen Ueberschiebungen des Typus:

$$(U_1^{\alpha_1} U_2^{\alpha_2} \dots U_i^{\alpha_i}, V_1^{\sigma_1} V_2^{\sigma_2} \dots V_k^{\sigma_k})^{(\lambda)}.$$

Bei diesen Ueberschiebungen kann, nach Aufnahme in das System, von

¹⁾ C. A. SPIERENBURG: Het comitantensysteem van een kubische en twee kwadratische binaire vormen. Dissertation, Amsterdam (1936). Verlag: NOORDHOFF, Groningen.

²⁾ GORDAN-KERSCHENSTEINER: Vorlesungen über Invariantentheorie II. § 31.

den Invarianten A_{ff} , A_{fg} , A_{gg} , und $A_{\Delta\Delta}$ als Faktoren der Produkte U bzw. V abgesehen werden und mit Berücksichtigung der bekannten Identitäten für δ^2 und Q^2 braucht man nur die erste Potenz dieser Formen zu berücksichtigen.

Nach Einteilung der Ueberschiebungen $(U, V)^{(\lambda)}$ in die Typen:

$$\begin{aligned} & (U_i^{\alpha_i}, V_k^{\sigma_k})^{(\lambda)} \\ & (U_i^{\alpha_i}, V_1^{\sigma_1} V_2^{\sigma_2} \dots V_k^{\sigma_k})^{(\lambda)} \\ & (U_1^{\alpha_1} U_2^{\alpha_2} \dots U_i^{\alpha_i}, V_k^{\sigma_k})^{(\lambda)} \\ & (U_1^{\alpha_1} U_2^{\alpha_2} \dots U_i^{\alpha_i}, V_1^{\sigma_1} V_2^{\sigma_2} \dots V_k^{\sigma_k})^{(\lambda)} \end{aligned}$$

findet man, mit Verwendung bekannter Reduktionsformeln für Ueberschiebungen, anfänglich 47 zum System gehörige Komitanten.

Unter diesen befinden sich die Teilsysteme der kubischen und je einer kwadratischen Form, welche 26, schon von GORDAN aufgestellten Formen enthalten, wobei ausser δ und A_{fg} , noch 19 Simultankomitanten der kubischen Form und beider kwadratischen Formen als neue Formen hinzutreten.

Die unten folgende Tabelle gibt eine Uebersicht der gewonnenen Ueberschiebungen:

f	$\delta = (f, g)^{(1)}$	g
$ff = (f, f)^{(2)}$	$A_{fg} = (f, g)^{(2)}$	$A_{gg} = (g, g)^{(2)}$
	φ	
	$\Delta = (\varphi, \varphi)^{(2)}$	
	$Q = (\varphi, \Delta)^{(1)}$	
	$A_{\Delta\Delta} = (\Delta, \Delta)^{(2)}$	
$= (f, \varphi)^{(1)}$	$\Theta_1 = (f, \Delta)^{(1)}$	$\pi = (\delta, \varphi)^{(2)}$
$= (f, \varphi)^{(2)}$	$A_{f\Delta} = (f, \Delta)^{(2)}$	$\Theta_2 = (g, \Delta)^{(1)}$
$= (f^2, \varphi)^{(3)}$	$r_1 = (f, Q)^{(2)}$	$A_{g\Delta} = (g, \Delta)^{(2)}$
$= (f^3, \varphi^2)^{(6)}$	$-s_1 = (f^2, Q)^{(3)}$	$r_2 = (g, Q)^{(2)}$
$= (f^3, \varphi Q)^{(6)}$		$-s_2 = (g^2, Q)^{(3)}$
$= (f\delta, \varphi)^{(3)}$	$q = (fg, \varphi)^{(3)}$	$F_2 = (g^3, \varphi^2)^{(6)}$
$= (f\delta, Q)^{(3)}$	$-s = (fg, Q)^{(3)}$	$M_2 = (g^3, \varphi Q)^{(6)}$
$= (f^2 g, \varphi^2)^{(6)}$		$k_2 = (g\delta, \varphi)^{(3)}$
$= (f^2 \delta, \varphi^2)^{(6)}$	$\Phi = (fg\delta, \varphi^2)^{(6)}$	$-\sigma_2 = (g\delta, Q)^{(3)}$
$= (f^2 g; \varphi Q)^{(6)}$		$V_2 = (fg^2, \varphi^2)^{(6)}$
$= (f^2 \delta, \varphi Q)^{(6)}$	$M = (fg\delta, \varphi Q)^{(6)}$	$\Phi_2 = (g^2 \delta, \varphi^2)^{(6)}$
		$N_2 = (fg^2, \varphi Q)^{(6)}$
		$M_2 = (g^2 \delta, \varphi Q)^{(6)}$

Bei der symbolischen Vorstellung dieser Ueberschiebungen genügt es, für jede Ueberschiebung je eines ihrer Glieder zu benutzen, da, infolge eines bekannten Satzes, die Ueberschiebung durch dieses Glied und eine Summe reduzibeler Glieder darstellbar ist.

So weit die Formen einem der Teilsysteme der kubischen und einer kwadratischen Form angehören, ist die Darstellung, nur mit Hinzufügung der Indizes (1, 2), dem GORDANSchen System entnommen. Symbolisch dargestellt umfasst das gesuchte System anfänglich die folgenden Komitanten:

die 4 kubischen Formen:

$$\begin{aligned} q &= \alpha_x^3, & \vartheta_1 &= (a \alpha) a_x \alpha_x^2, \\ Q &= (a \Delta) \alpha_x^2 \Delta_x, & \vartheta_2 &= (m a) m_x \alpha_x^2, \end{aligned}$$

die 6 kwadratischen Formen:

$$\begin{aligned} f &= a_x^2, & \Delta &= (\alpha \beta)^2 \alpha_x \beta_x = \Delta_x^2, \\ g &= m_x^2, & \Theta_1 &= (a \Delta) a_x \Delta_x = \Theta_{1x}^2, \\ \delta &= (a m) a_x m_x = \delta_x^2, & \Theta_2 &= (m \Delta) m_x \Delta_x = \Theta_{2x}^2, \end{aligned}$$

die 16 Linearformen:

$$\begin{aligned} p_1 &= (a \alpha)^2 a_x = p_{1x}, & \pi &= (\delta \alpha)^2 a_x = \pi_x, & p_2 &= (m a)^2 a_x = p_{2x}, \\ q_1 &= (a p_1) a_x = q_{1x}, & q &= \frac{1}{2} \{ (m p_1) m_x + (a p_2) a_x \} = q_x, & q_2 &= (m p_2) m_x = q_{2x}, \\ k_1 &= (a \pi) a_x = k_{1x}, & & & k_2 &= (m \pi) m_x = k_{2x}, \\ r_1 &= (p_1 \Delta) \Delta_x = r_{1x}, & \varrho &= (\pi \Delta) \Delta_x = \varrho_x, & r_2 &= (p_2 \Delta) \Delta_x = r_{2x}, \\ s_1 &= (\Theta_1 p_1) \Theta_{1x} = s_{1x}, & s &= \frac{1}{2} \{ (\Theta_1 p_2) \Theta_{1x} + (\Theta_2 p_1) \Theta_{2x} \} = s_x, & s_2 &= (\Theta_2 p_2) \Theta_{2x} = s_{2x}, \\ \sigma_1 &= (\Theta_1 \pi) \Theta_{1x} = \sigma_{1x}, & & & \sigma_2 &= (\Theta_2 \pi) \Theta_{2x} = \sigma_{2x}, \end{aligned}$$

die 21 Invarianten:

$$\begin{aligned} A_{ff} &= (ab)^2, & A_{fg} &= (am)^2, & A_{gg} &= (mn)^2, \\ A_{f\Delta} &= (a\Delta)^2, & A_{\Delta\Delta} &= (\Delta\Delta)^2, & A_{g\Delta} &= (m\Delta)^2, \\ & & A_{\delta\delta} &= (\delta\delta)^2, & & \\ F_1 &= (ap_1)^2, & V_1 &= (mp_1)^2, & V_2 &= (ap_2)^2, & F_2 &= (mp_2)^2, \\ \Phi_1 &= (\delta p_1)^2, & \Phi &= (\delta p_1)(\delta p_2), & & \Phi_2 &= (\delta p_2)^2, \\ M_1 &= -(\Theta_1 p_1)^2, & N_1 &= -(\Theta_2 p_1)^2, & N_2 &= -(\Theta_1 p_2)^2, & M_2 &= -(\Theta_2 p_2)^2, \\ M_1 &= -(\Theta_1 p_1)(\Theta_1 \pi), & M &= -\frac{1}{2}(\delta\Delta)[(\delta p_1)(\Delta p_2) + (\delta p_2)(\Delta p_1)], & & & \\ & & & & & & M_2 &= -(\Theta_2 p_2)(\Theta_2 \pi). \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise, wie es von B. L. VAN DER WAERDEN ¹⁾ für die

¹⁾ B. L. VAN DER WAERDEN: Over het concomitantensysteem van twee en drie ternaire kwadratische vormen. Proc. Royal Acad. Amsterdam, 26, 1–11 (1923).

Systeme zweier und dreier Kegelschnitte geschah, kann man auch hier die Reduktion des vorliegenden Systems versuchen.

Mit Berücksichtigung der Gradzahlen der Formen gelangt man zur Aufstellung a priori möglicher Reduktionsformeln, welche, oft mit Anwendung geometrischer Betrachtungen, untersucht werden können.

Es zeigt sich die Reduzibilität der Komitanten ϱ , σ_1 , σ_2 , M_1 , M_2 und M , gemäsz folgender Formeln:

$$\begin{aligned}\varrho &= \frac{1}{2} \{ A_{g1} \cdot p_1 - A_{f1} \cdot p_2 \}, \\ \sigma_1 &= \frac{1}{2} \{ A_{f1} \cdot (q + \frac{1}{2}\pi) - A_{g1} \cdot q_1 \}, \\ \sigma_2 &= -\frac{1}{2} \{ A_{g1} \cdot (q - \frac{1}{2}\pi) - A_{f1} \cdot q_2 \}, \\ M_1 &= \frac{1}{2} \{ A_{g1} \cdot F_1 - A_{f1} \cdot V_1 \}, \\ M_2 &= -\frac{1}{2} \{ A_{f1} \cdot F_2 - A_{g1} \cdot V_2 \}, \\ M &= \frac{1}{4} (A_{f1}^2 \cdot A_{gg} - A_{g1}^2 \cdot A_{ff}) + \frac{1}{2} (A_{g1} \cdot V_1 - A_{f1} \cdot V_2).\end{aligned}$$

Von den übrigen 41 Formen des Systems lässt sich beweisen, dass sie ein kleinstes volles Komitantensystem einer kubischen und zweier kwadratischen binären Grundformen bilden.

Eine ausführlichere Behandlung dieses Systems samt der Besprechung seiner Bedeutung in Bezug auf die Aufstellung der Kombinanten zweier Kegelschnitte und der Diskussion der geometrischen Deutung seiner wichtigsten Formen wurde in der oben zitierten Dissertation gegeben.

Botany. — *Transport of nitrogenous substances under influence of differences in humidity.* By M. P. BOTH. (Communicated by Prof. J. C. SCHOUTE.)

(Communicated at the meeting of March 28, 1936).

It has been demonstrated with sufficient certainty by the researches of CURTIS (1), MASON, MASKELL and PHILLIS, (4—12, especially 9) and SCHUMACHER (17, 18) that the transport of the organic substances goes through the phloem. SCHUMACHER, by his isolation and eosine experiments has provided good reason for thinking that the sieve-tubes are required for this purpose. The same investigator also found that a colouring matter, fluoresceine, was transported through the sieve-tubes.

All the above investigators are agreed that the organic *N*-compounds are transported through the sieve-tubes. OUDMAN (15, 16), also, has given good reason for supposing that, in the case of *Drosera*, substances containing *N*, which were placed on the leaves, were carried off by the sieve-tubes; after treatment with eosine the transport was checked.

It is at any rate certain that a transport which fully meets the needs of the plant takes place through the phloem.

With regard to the mechanism of the transport through the sieve-tubes nothing certain is as yet known. The pressure-stream hypothesis of MÜNCH (14) is disputed by many. The accelerated diffusion hypothesis of MASON gives an idea of the process, but as such is not an explanation.

CURTIS considers a protoplasm current possible, and adduces many arguments in favour of this; but he also has many objections to it. It is of importance that SCHUMACHER was able to ascertain with his fluorescein tests that this transport went through the protoplasm. He says nothing more as to the mechanism beyond that it leads one to think of a certain polarity. This pronouncement is typical of the uncertainty on this point.

Under these circumstances it is undoubtedly useful, apart from all theory, to make quantitative tests on a simple system, and to determine the influence of various circumstances on a transport in this system. As a system of this kind one might conceive of a leaf from which a substance is transported, connected with another leaf to which this transport takes place.

The first question to be solved is: Is a transport from leaf to leaf possible in this system? If so, the question follows: Can this transport be influenced by various external circumstances, and how?

Method. A suitable object was found to be *Impatiens Marianae*¹⁾, of which even in winter it was possible to use young, vigorously growing cuttings.

The system consisted of a stem with two, four, or six leaves. All the other leaves, the lateral branches, and also the top (see fig. 1) were removed from the stem. Young, fully-grown leaves were used.

In most of the tests coffeein was employed as transport substance; in a few cases asparagin was also used. KOK (2 and 3) had also used this substance for transport tests, and OUDMAN (15 and 16) found with *Drosera* a considerable absorption, followed by a loss by transport. Quantitative tests were made of the content of organic N. The nitrogen determinations were carried out, in accordance with the micro Kjeldahl method, with the apparatus according to PARNAS—WAGNER.

The tests were made in a room with a constant temperature of 21° C, and a constant humidity of approx. 80 %. Approx. 8 hours artificial light per diem were given.

Arrangement of the experiments.

To render possible a determination of the changes in the N-content of the leaves it was necessary to relate the successive observations to a

¹⁾ Under this name the plant was labelled in the botanical garden.

constant value. For this purpose the area of a number of pieces punched out of the leaf was chosen.

In the first place it had to be shown that the relative value used really yields reliable values. For this purpose blank tests were made, from which the variability was found.

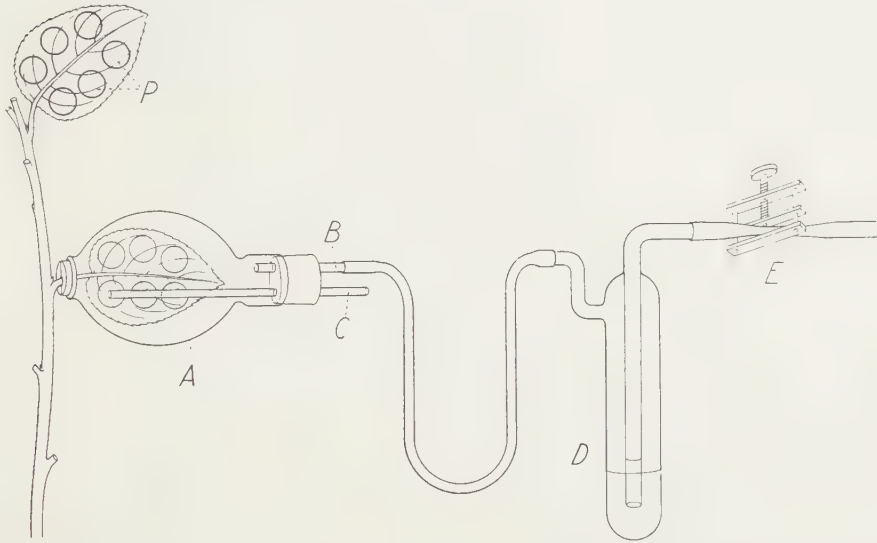


Fig. 1. System of two leaves. Six equal areas *P* are stamped off on the leaves. The lower leaf is in a chamber *A*, through which a stream of air, saturated with water-vapour, is passed. *B* entrance of air, *C* outlet of air. *D* washing-bottle and *E* tap to control the stream of air.

At first the tests were carried out as follows. Three plants were dug out of the pots they had been grown in, the tops cut off as described, above, the leaves and the lateral branches removed, so that only the six youngest leaves were left in place; 3 of these served as supplying and 3 as receiving leaves. To prevent change of area as a result of turgescence differences, equal areas were stamped off at the beginning of the test on each half of the three receiving leaves. One half of each of the leaves was then collected. These nine half-leaves were arranged in three groups, as follows. The first group consisted of one half of the first leaf of plant 1, (11), one of the second leaf of plant 2, (22), and one of the third leaf of plant 3, (33). The second group consisted of one half of the third leaf of plant 1, (13), of the first leaf of 2, (21), and the second of 3, (32). The third group consisted of the halves of the remaining three leaves (12, 23 and 31). The *N*-content of the marked-off areas of each of these three portions was determined. The other halves of these groups were afterwards collected, and the *N*-content of the marked-off areas compared with that of the portions first collected. *Table I* clearly shows that in this way it is really possible to obtain reliable values, but

that a difference must amount to at least 10 % of the original value to be of any significance.

TABLE I.

Comparison of the *N*-content of equal areas from halves of groups of 3 leaves. Column 3 absolute values in mg. *N*, column 4 as % of the average *N*-content (0.274). The time is indicated in all the tables in hours from the beginning of the test.

Leaf number	Time from beginning of test	mg. <i>N</i>	% of av. <i>N</i> -con
11, 22, 33	0 h.	0.274	100
Idem	0 h.	0.262	96
13, 21, 32	0 h.	0.286	104
Idem	0 h.	0.284	104
12, 23, 31	0 h.	0.278	101
Idem	24 h.	0.260	95

As the three groups were also reasonably equal to one another, a simplification was subsequently introduced. The tests were then made as follows. On each half of the three leaves three equal areas were marked off, one at the base, one in the middle, and one at the top. When taking the first samples one of these areas was taken out of the lowest part of the first leaf, one out of the middle of the second, and one out of the top of the third; the second group consisted of one piece out of the top of the first leaf, the lowest of the second, and the middle one of the third, etc. In this way all the samples consisted of one piece from the lowest, one from the middle and one from the upper part of a leaf.

Table II gives a summary of the values obtained in this way. In these tests both the uppermost (1, 2, 3) and the lowest leaves (4, 5, 6) were examined.

These values, also, were satisfactorily comparable and remained constant for several days; only the value after 90 hrs. showed a considerable fall.

After the first samples had been taken the supplying leaves were treated with the transport substance, generally, that is, coffein. At first this was put on the back of the leaves in agar, later in cotton-wool, which was saturated with the solution. Most of the tests, however, were made with leaves into which the coffein had been introduced by infiltration, according to MOTHES (13).

The other leaves were regarded as receivers; samples were taken at certain intervals of time. An increase of the *N*-content per unit of area

TABLE II.

N-content of equal areas in the uppermost (1, 2, 3) and lowest leaves (4, 5, 6) of 1 plant; in mg. *N* and as % of the original value.

Material	Time	N in mg.	% of original <i>N</i> -content
1, 2, 3 1 st anal.	6 h.	0.166	100
Idem 2 nd	20 h.	0.162	98
Idem 3 rd	42 h.	0.162	98
Idem 4 th	90 h.	0.142	86
4, 5, 6 1 st anal.	0 h.	0.140	100
Idem 2 nd	20 h.	0.140	100
Idem 3 rd	42 h.	0.140	100
Idem 4 th	90 h.	0.116	83

of the receiving leaves proves that substances containing *N* have been transported to them.

Experiments. In the first tests the transport substance was placed on the leaves in agar. Table III gives the course of the *N*-content of a test of this kind. The supplying leaves were in this case treated immediately after the first samples had been taken with a solution of 1.5 % asparagin in 2 % agar. Tests were made with three plants, each with three receiving

TABLE III.

N-content of equal areas of halves of the receiving leaves, after treatment of the supplying leaves with asparagin 1.5 % in 2 % agar.

Material	Time	mg. <i>N</i>	% of original <i>N</i> -content
11, 22, 33, 1 st anal.	0 h.	0.206	100
Idem 2 nd „	29 h.	0.228	111
13, 21, 32, 1 st anal.	0 h.	0.214	100
Idem 2 nd „	43 h.	0.272	127
12, 23, 31, 1 st anal.	0 h.	0.204	100
Idem 2 nd „	72 h.	0.224	110

leaves; plant 1 with the leaves 11, 12, and 13, plant 2 with the leaves 21, 22, and 23, etc. At the beginning of the experiment equal areas of 1 half of each of the nine leaves, in three groups, as described above, were tested. After 29, 53 and 72 hours the areas of the other halves were analysed.

From the table it will be seen that a distinct transport had taken place.

A distinct increase of the *N*-content was also to be observed in the receiving leaves when the coffein was applied in cotton-wool. See Table IV.

TABLE IV.
N-content of equal areas of halves of the receiving leaves, after treatment of the supplying leaves with coffein 10/0 in cotton-wool.

Material	Time	mg. <i>N</i>	% of original <i>N</i> -content
1st analysis 11, 22, 33	0 h.	0.168	100
2nd analysis idem	29 h.	0.260	155
1st analysis 13, 21, 32	0 h.	0.168	100
2nd analysis idem	53 h.	0.256	152
1st analysis 12, 23, 31	0 h.	0.172	100
2nd analysis idem	72 h.	0.258	144

In both these different kinds of tests the supplying leaves, however, were injured. By using a very thin layer of cotton-wool it was possible to prevent this injury to a great extent. A change over, however, was made to infiltration, according to the method of MOTHES. No injury then occurred. With the tests made in this way, however, no transport was found.

In the two cases mentioned above, therefore, the transport is a result of the injury to the supplying leaves.

Another influence therefore had to be sought for which could cause a transport without injury to the supplying leaves.

The supplying leaves were now placed in shallow glass chambers, through which a stream of air saturated with water-vapour was passed. This was obtained by first letting the air pass through three washing bottles filled with water. The receiving leaves were at the humidity of the room (80 %).

A good two hours after the first samples had been taken the leaves were infiltrated with a solution of 1 % coffein. After the water had disappeared out of the intercellular spaces, the leaves treated were placed in the chambers (5½ hours after the first samples had been taken). The sampling was done in the second way described above.

From table V it is clearly seen that a transport takes place in this case also.

TABLE V.

N-content of equal areas of the receiving leaves, after infiltration of the supplying leaves with coffein 1 0/0 and after placing these in chambers through which air saturated with water-vapour had been passed.

Material	Time	mg. <i>N</i>	0/0 of orig. <i>N</i> -content
Receiving leaves 1 st anal.	0 h.	0.112	100
Idem 2 nd anal.	5½ h.	0.114	102
Idem 3 rd anal.	25½ h.	0.116	104
Idem 4 th anal.	48 h.	0.148	132
Idem 5 th anal.	71½ h.	0.152	135

This, therefore, demonstrates that under normal conditions a transport may take place [from leaf to leaf], if the supplying leaf remains in an environment saturated with water-vapour, whilst the receiving leaf is in an environment with a humidity of 80 %.

The question now was whether this transport went through the phloem or through the xylem vessels.

To ascertain this the wood was stopped up with cocoa-butter. Twigs were cut off and placed in liquid cocoa-butter coloured with Soudan III; when this had risen far enough, the test was carried out in the usual way. The stem was surrounded with damp cotton-wool to prevent withering. On the conclusion of the test sections were examined to see whether the cocoa-butter had really filled up the vessels between the two leaves. Table VI shows the figures of a test of this kind. In this test the cocoa-butter had filled up the vessels up to from 1.5 to 2 cm. above the lower (supplying) leaf.

The table clearly shows that the transport is not checked by rendering the woodvessels unserviceable for transport.

A second method of determining whether the transport goes through the phloem vessels is to stop up the sieve-tubes by treating them with eosine, as SCHUMACHER did with his *Pelargoniums*. The two leaves of the test plants were furnished at the top, where no samples were to be taken, with a layer of cotton-wool into which a solution of eosine w. gelbl. 1 : 10.000 had been introduced. After the removal of the cotton-wool the leaves were infiltrated, the test being then concluded in the usual way. The plants did not stand this treatment as well as SCHUMACHER describes in the case of *Pelargonium*. More especially the supplying leaf was frequently somewhat injured after the infiltration. They then more or less

TABLE VI.

N-content of equal areas of receiving leaves, while the wood-vessels are stopped up with cocoa-butter. Supplying leaves infiltrated with 1% coffein and in an environment saturated with water-vapour.

Material	Time	mg. <i>N</i>	% of orig. <i>N</i> -content
Receiving leaves 1 st anal.	0 h.	0.134	100
Idem 2 nd anal.	45 h.	0.182	136
Idem 3 rd anal.	72 h.	0.222	166
Idem 4 th anal.	96 h.	0.204	152
Idem 5 th anal.	118 h.	0.214	160
Idem 6 th anal.	141 h.	0.212	158

quickly acquired the same appearance as the leaves on which the transport substance had been placed in agar. As leaves of this description in the tests already mentioned had, however, shown a transport, it is not probable that the negative results obtained in this case were caused by the injury.

An anatomical investigation of the petioles and stems of plants treated showed the sieve-tubes in the stem to be full of callus; in the petiole they were also frequently collapsed.

The effect on the transport of treating the plants in this way with eosine is shown in Table VII. *The receiving leaves show no increase in N-content.*

TABLE VII.

N-content of receiving leaves after treatment with eosine. Supplying leaves infiltrated with coffein 1%, and in an environment saturated with water-vapour.

Material	Time	<i>N</i> in mg.	% of orig. <i>N</i> -content
Receiving leaves 1 st anal.	0 h.	0.260	100
Idem 2 nd anal.	25 h.	0.260	100
Idem 3 rd anal.	76 h.	0.272	105

These tests, combined with those in which the wood was stopped up, demonstrate the probability that the transport which occurs in the system used, when the supplying leaves are in an environment saturated with water vapour and the receiving leaves in one with a humidity of about 80 %, really goes through the phloem.

That it is really the difference in humidity which causes this transport

is proved by the fact that it does not take place when both the transport leaves and the supplying leaves are put into a humid environment. Table VIII shows the course of the *N*-content of the transport leaves of a plant of this kind.

TABLE VIII.

N-content of equal areas of the receiving leaves. Supplying leaves infiltrated with coffein 1%. All leaves in an environment saturated with water vapour.

Material	Time	mg. <i>N</i>	% of orig. <i>N</i> -content
Receiving leaves 1 st anal.	0 h.	0.098	100
Idem 2 nd anal.	43 h.	0.096	98
Idem 3 rd anal.	67 h.	0.092	94
Idem 4 th anal.	91 h.	0.098	100

When the receiving leaves are in an environment saturated with water vapour and the supplying leaves in a comparatively dry one, no transport takes place. It seems to me to be proved by all the above tests that in a system consisting of a stem with two groups of leaves, a transport is to be induced by putting the supplying leaves into an environment with a high degree of humidity, whilst the receiving leaves remain in a comparatively dry environment.

Before it is possible to draw conclusions as to the mechanism of the transport, the influence of other conditions must be determined.

Summary. Tests with regard to the transport of substances were carried out on a system consisting of two groups of leaves on one stem of *Impatiens Marianae*.

A transport from supplying to receiving leaves is to be obtained by means of an injury to the former, caused by putting coffein or asparagin in agar or cotton-wool on to them.

2. After infiltration according to MOTHES the supplying leaves remained uninjured. In this case no transport was found. When one group of leaves was infiltrated with a coffein solution, and then put into a damp environment, whilst the other group remained in a comparatively dry one, a distinct increase of the *N*-content in the latter group of leaves was to be observed.

3. When both groups were in the same conditions, no transport took place.

4. Stopping up the wood with cocoa-butter did not check the transport; the blocking up of the phloem vessels by means of eosine treatment, however, did so. The transport therefore probably takes place through the sieve tubes.

The investigations were carried out in the Laboratory for Plant Physiology at the State University of Groningen. I wish to express my hearty thanks to Prof. Dr. W. H. ARISZ for his help and constant interest.

LITERATURE CITED.

1. CURTIS, OTIS F. (1935). The translocation of solutes in plants. New York and London, 273 pp.
 2. KOK, ALI C. A. (1931). Ueber den Einfluss der Plasmarotation auf den Stofftransport. Proc. Royal Acad. Amsterdam, **24**, 918—929.
 3. KOK, ALI C. A. (1933). Ueber den Transport körperfremder Stoffe durch parenchymatische Gewebe. Rec. des Trav. Bot. Neerlandais, **30**, 23—139.
 4. MASKELL, E. J. and T. G. MASON (1929). *a*. Studies on the transport of nitrogenous substances in the cotton plant. I. Preliminary observations on the downward transport of nitrogen in the stem. Ann. Bot. **43**, 205—231.
 5. MASKELL, E. J. and T. G. MASON (1929). *b*. Studies etc. II. Observations on concentration gradients. Ann. Bot. **43**, 615—652.
 6. MASKELL, E. J. and T. G. MASON (1930). *a*. Studies etc. III. The relation between longitudinal movement and concentration gradients in the bark. Ann. Bot. **44**, 1—29.
 7. MASKELL, E. J. and T. G. MASON (1930). *b*. Studies IV. The interpretation of the effects of ringing with special reference to the lability of the nitrogenous compounds of the bark. Ann. Bot. **44**, 233—264.
 8. MASKELL, E. J. and T. G. MASON (1930). *c*. Studies etc. V. Movement to the boll. Ann. Bot. **44**, 657—688.
 9. MASON, T. G. and E. J. MASKELL (1928). *a*. Studies on the transport of carbohydrates in the cottonplant. I. A study of diurnal variation in the carbohydrates of the leaf, bark and wood, and the effects of ringing. Ann. Bot. **42**, 189—253.
 10. MASON, T. G. and E. J. MASKELL (1928). *b*. Studies etc. II. The factors determining the rate and the direction of movement of sugars. Ann. Bot. **42**, 571—636.
 11. MASON, T. G. and E. J. MASKELL (1931). Further Studies on the transport in the cotton plant. I. Preliminary observations on the transport of phosphorus, potassium, and calcium. Ann. Bot. **45**, 125—173.
 12. MASON, T. G. and E. J. MASKELL (1934). Studies on the transport of nitrogenous substances in the cotton plant. VI. Concerning storage in the bark. Ann. Bot. **48**, 315—333.
 13. MOTHES, K. (1933). Die Vakuuminfiltration im Ernährungsversuch. (Dargestellt an Untersuchungen über den Assimilation des Ammoniaks.) Planta **19**, 117—138.
 14. MÜNCH, ERNST (1930). Die Stoffbewegungen in den Pflanzen. Jena 234 pp.
 15. OUDMAN, J. (1935). Nährstoffaufnahme und Transport durch die Blätter von *Drosera capensis* L. Proc. Royal Acad. Amsterdam, **38**, 650—662.
 16. OUDMAN, J. Dissertation, Groningen (In press.)
 17. SCHUMACHER, WALTER (1930). Untersuchungen über die Lokalisation der Stoffwanderung in den Leitbündeln höherer Pflanzen. Jahrb. f. wiss. Bot. **73**, 770—823.
 18. SCHUMACHER, WALTER (1933). Untersuchungen über die Wanderung des Fluoreszeins in den Siebröhren. Jahrb. f. wiss. Bot. **77**, 685—732.
-

Embryology. — *Gebiss- und Zahnentwicklung bei der Irisforelle (Salmo irideus)*. IV. *Zwischenkiefer und Pflugscharbein*. Von B. VAN DER EYKEN. (Communicated by Prof. M. W. WOERDEMAN).

(Communicated at the meeting of March 28, 1936).

a. *Zwischenkiefer*: [s. Figg. 1 und 2].

Um die Verhältnisse im Zwischenkiefer der Irisforelle festzustellen und zu sehen, ob sich auch hier, wie im Unterkiefer, im Oberkiefer und auf dem Zungenbein, die Zähne in Odontostichi anlegen, werden wir jetzt die Präparatenserie noch einmal durchgehen ¹⁾).

Das jüngste Stadium, in welchem wir ein Element im Zwischenkiefer angelegt finden, ist wieder das Stadium *E*. Links und rechts ist eine winzig kleine Papille vorhanden, welche noch keine Spur von Dentin zeigt.

Zwei Keime sind in der Larve *F* vorhanden, wo sich lateral von der ältesten Papille, welche hier schon ein Scherbchen Dentin besitzt, eine zweite, ganz kleine Papille entwickelt hat.

Die Larve *H* besitzt drei Zwischenkieferzähnnchen nebeneinander, welche alle schon ein wenig Dentin zeigen. Der mittlere Keim ist deutlich der älteste, die meist medial gelegene Papille ist die kleinste und jüngste. Zuerst hat sich also lateral vom ersten Keim eine Anlage geformt, danach hat sich medial von diesen beiden die dritte angelegt.

Ganz in Uebereinstimmung mit diesem Befunde ist die Reihenfolge des Entstehens der Elemente im Stadium *N*, welches das nächst ältere ist. Hier sind in der linken Kieferhälfte fünf Keime vorhanden, welche sich, nach ihrem Alter zu urteilen, so angelegt haben müssen, dass sich wechselweise lateral und medial ein Zähnchen an die schon vorhandenen Keime zugefügt hat. Wenn wir die Anlagen der Reihenfolge ihres Entstehens nach eine Nummer geben, so können wir sagen, dass die Elemente des linken Zwischenkieferteiles sich in dieser Reihenfolge angelegt haben: 4—2—1—3—5; Nummer 5, das zuletzt entstandene Element, liegt am nächsten bei der Medianlinie. Die Nummern 1, 2 und 3 haben schon deutlich Dentin; 4 ist eine dentinlose Papille und 5 hat sich links gerade erst angelegt, ist nur auf einem einzigen Schnitte zu sehen, während sie rechts noch gar nicht vorhanden ist.

Ungefähr ebensoweit fortgeschritten ist das Stadium 47.

Es sind ebenfalls fünf Zähne im Zwischenkiefer vorhanden, welche rechts genau in der-

¹⁾ Für Einzelheiten betreffs Grösse und Alter der Larven, und Weise der Untersuchung, verweisen wir auf die Proc. Royal Acad. Amsterdam, 38, 912 (1935). Man siehe auch meine Mitteilungen in diesen Proceedings, 38, 1099 (1935) und 39, 271 (1936).

selben Reihenfolge sich angelegt haben, wie in den vorangehenden Stadien. Links in diesem Präparate scheint der meist laterale Keim der jüngste zu sein; hier haben sich die Elemente offenbar in dieser Reihenfolge entwickelt: 5—2—1—3—4, wenn wir uns die Medianlinie wieder neben der Nummer 4 denken. Die drei mittleren Keime haben eine Dentinscherbe, die meist medialen und lateralen Anlagen sind dentinlose Papillen. Die äussere Schmelzepithelschicht des ältesten, sich wie die andern fast horizontal ausdehnenden Zahnes hat sich an der dorsalen Seite etwas ausgebuchtet, während die dadurch entstandene Lücke zwischen den inneren und äusseren Schmelzepithelschichten mit mehreren Schmelzpulpazellen ausgefüllt ist. Diese Ausbuchtung bildet den Anfang der Ersatzzahnbildung.

Die Präparate 48 und G, welche gleiche Stadien der Entwicklung des Zwischenkiefergebisses darstellen, zeigen wieder dieselbe Zahl der vorhandenen Keime und dieselbe Reihenfolge ihres Entstehens. Nur in der

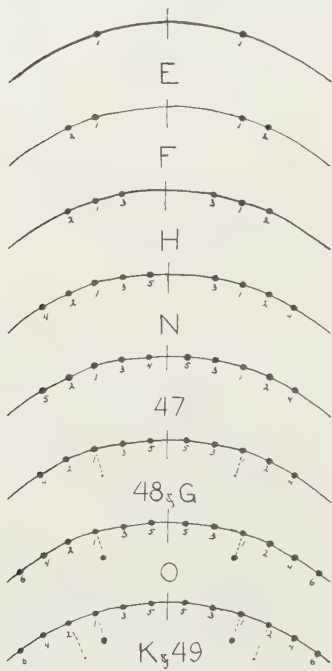


Fig. 1. Schemata der Gebisszusammensetzung im Zwischenkiefer der untersuchten Entwicklungsstadien (E, F, u. s. w.)

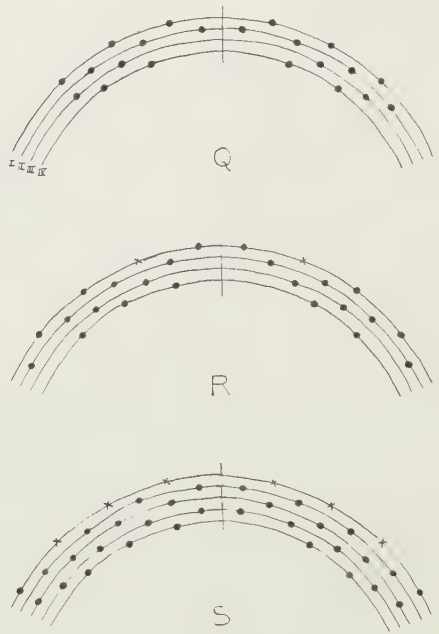


Fig. 2. Schemata der Zusammensetzung des Zwischenkiefergebisses der Stadien Q, R und S.

Hinsicht ist die Entwicklung weiter fortgeschritten, dass die ausgebuchtete äussere Schmelzmembran des ältesten Keimes jetzt deutlich eine Gemma geformt hat. In beiden Präparaten besitzen die drei mittleren Keime Dentin und vermissen die meist medialen und lateralen Anlagen das Zahnbein.

Im Stadium O ist der Ersatzkeim des zuerst geformten Zahnes deutlich papillenförmig entwickelt, zeigt aber noch kein Dentin. Im rechten Kieferteile sind wieder fünf Elemente vorhanden, welche hier alle mehr oder weniger mit Dentin versehen sind.

Links ist im meist medialen Keim noch kein Zahnbein sichtbar, während lateral, oder

distal, wie wir jetzt wegen der Krümmung des Zwischenkiefers sagen müssten, eine kleine Papille die sechste Anlage darstellt. Die Elemente legten sich in derselben Reihenfolge an, wie wir in den meisten Präparaten gefunden haben, also im linken Kieferteile von lateral nach medial, als Nummer 6—4—2—1—3—5.

Eine Stufe weiter ist die Larve *K*, wo beiderseits im Zwischenkiefer sechs Zähne vorhanden sind, welche sämtlich Dentin besitzen.

Ausserdem hat der älteste Zahn einen schönen, papillenförmigen Ersatzzahn, der schon ein Scherbchen Zahnbein zeigt. Die äussere Schmelzepithelmembran seines lateralen Nachbarn ist dorsalwärts ausgebuchtet, als Andeutung einer baldigen Ersatzkeimbildung, ohne jedoch schon eine Gemma gebildet zu haben. Die Elemente haben sich in derselben Ordnung angelegt, wie im vorangehenden Stadium.

Dieselbe Stufe der Entwicklung als *K* zeigt das horizontal geschnittene Präparat 49; hier liegen genau dieselbe Verhältnisse vor, wie im vorangehenden Präparate, sodass diese Larve keiner weiteren Besprechung bedarf.

Bis hierher sind wir noch nichts begegnet, was darauf hinweisen könnte, dass die Elemente im Zwischenkiefer sich in Zahnreihen anlegen; von einer alternierenden Lage der benachbarten Zähne ist keine Spur zu sehen und auch die Abstände der verschiedenen Keime von einander geben uns keine Anweisungen, welche eine Entwicklung der Elemente in *Odontostichi* wahrscheinlich machen. Die Zähne der beiden Zwischenkieferhälften liegen nahezu auf einem Kreisbogen, nur die meist medial gelegenen Elemente liegen ein wenig mehr distalwärts, sodass die beiden Hälften zusammen ungefähr die Form des oberen Teiles einer Herzfigur haben. Die Ersatzzähne sind distal-, mitunter auch ein wenig medialwärts von ihren Vorgängern gelegen.

Wenn wir jetzt die älteren Stadien *Q*, *R*, *S* und *L* betrachten, wo sich 4, bez. 5, 8 und 8 Ersatzzähne angelegt haben, so sehen wir zu unserem Erstaunen eine vollkommen regelmässige, schön ausgeprägte Alternation zwischen den verschiedenen Ersatzkeimen, welche also doch auf die Entwicklung der Elemente in *Odontostichi* hinweist. Es kommt mir wahrscheinlich vor, dass die Zahnanlagen der beiden ersten *Stichi* sich mit geringerer Zeitdifferenz entwickelt haben, als diejenigen der späteren Zahnreihen, wodurch die Elemente dieser zwei Reihen keine sofort sichtbare Alternation aufweisen. Erst beim Entstehen der dritten und vierten *Stichi* kommt die Alternation deutlich zum Vorschein.

Betrachten wir aber zunächst die genannten Stadien etwas genauer.

Das Präparat *Q* zeigt links wieder dieselben sechs Elemente der ersten zwei *Stichi*, falls diese Voraussetzung in der Tat zutrifft, wie in den ältesten vorangehenden Stadien.

Von einer Alternation zwischen den Zähnen dieser zwei Reihen ist nichts zu sehen und wenn wir ihre Zugehörigkeit zu zwei *Stichi* ausser Betracht lassen und nur nachgehen, in welcher Reihenfolge sie sich angelegt haben müssen, so können wir sie, ihrem Alter nach, von lateral nach medial, 4—2—1—3—5—6 numerieren; diese Ordnung des Entstehens stimmt also ziemlich gut überein mit derjenigen der jüngeren Stadien. Alle

sechs Zähne haben Dentin, während die Nummern 4, 2, 1 und 3 schon dentinhaltige Ersatzkeime besitzen. Diese vier Ersatzzähnen weisen eine deutliche Alternation auf und zwar so, dass diejenigen, welche zu 2 und 3 gehören, mehr distal- und medialwärts gelegen sind, also mehr lingualwärts einspringen, als die zwei andern. So ist es auf der Hand liegend, anzunehmen, dass die Nummern 4, 1 und wahrscheinlich 5, weil die Elemente lückenlos auf einander folgen, der ersten Zahnreihe angehören, während 2, 3 und 6 zum zweiten Stichos gehören.

Von diesem Stadium können wir also ein Schema aufstellen, wie es in Fig. 2 gegeben wird.

Rechts im Präparate *Q* finden wir nur diesen Unterschied, dass sich hier distalwärts noch eine Papille entwickelt hat, welche gleichalterig mit dem meist medialen dentinlosen Keim sein muss; diese haben sich also zu gleicher Zeit angelegt.

Im Präparate *R* sind, die Ersatzzähne ausser Betracht gelassen, beiderseits acht Elemente vorhanden, von denen nur der meist distale Keim links kein Dentin besitzt.

Die beiden am meisten distal gelegenen Zähnen haben keinen Ersatzzahn; ebenso wenig das erste und dritte Element von der Medianebene gerechnet. Dass dieser letztgenannte Zahn ohne Ersatzkeim geblieben ist, ist sonderbar, denn wir haben aus den vorangehenden Stadien ersehen können, dass dieser Zahn sich als einer der ersten angelegt haben muss. Wenn wir aber dieses Element in der Rekonstruktion besser betrachten, so fällt uns auf, dass es ein wenig lingualwärts einspringt und regelmässig in die Zickzacklinie der alternierenden Ersatzkeime passt. Im Präparate finden wir ausserdem in beiden Kieferhälften labialwärts von diesem Keime eine abgelöste Zahnschmelze im Epithel liegen, als Beweis dafür, dass das vorliegende Element seinen Vorgänger schon ersetzt hat. Wenn wir nun, dem Alter nach urteilend, versuchen die Reihenfolge, in welcher die Elemente der ersten zwei Stiche sich angelegt haben müssen, festzustellen, so kommen wir zu einem beträchtlich abweichenden Resultat, nämlich 8—6—5—2—3—1—4—7; diese Nummern geben wieder die Reihenfolge des Entstehens der Zähne im linken Kiefertheile von lateral nach medial gerechnet. Nun kommt es mir aber unwahrscheinlich vor, dass diese Reihenfolge in der Tat die richtige ist und dass die Gebissanlage in diesem Falle grundverschieden von der, zwar typischen, aber doch regelmässigen Anlage in allen vorangehenden Stadien statt gefunden hätte. Vielmehr müssen wir hier annehmen, dass das Wachstum der verschiedenen Elemente und ihre Ersatzzahnbildung ungleich schnell verlaufen ist, sodass jetzt nicht mehr zu entscheiden ist, in welcher Reihenfolge sich die Zähne der beiden ersten Zahnreihen angelegt haben. Wenn wir aber die eben gegebene, vermutlich falsche, Numerierung gebrauchen um die Elemente benennen zu können, so können wir noch bemerken, dass die Nummer 2¹⁾ schon stark in Resorption begriffen ist, sodass in der rechten Kieferhälfte von diesem Zahne die Spitze schon ganz abgelöst ist. Die Ersatzzähne der Nummern 5, 3 und 4 springen am meisten lingualwärts ein, sodass wir berechtigt sind, diese Nummern zum zweiten Odontostichos zu rechnen, während die Nummern 6, 2, und die schon verlorengegangene Nummer 1 zum ersten Stichos gehören müssen.

Schematisch gibt Fig. 2 die Verhältnisse wieder.

Im Präparate *S* sind die Verhältnisse etwas komplizierter, weil hier verschiedene Elemente verloren gegangen und ersetzt worden sind. Da sich

¹⁾ Es ist selbstverständlich, dass die gleichnummerierten Zähne der Stadien *Q*, *R* und *S* nicht homolog sind, dass also Nummer 2 des Stadiums *Q* keineswegs mit derselben Nummer des Stadiums *R* verglichen werden darf.

hier bezüglich der Reihenfolge, in welcher die Elemente der ersten zwei Zahnreihen sich angelegt haben mögen, nichts sagen lässt, geben wir den acht vorhandenen Zähne von lateral nach medial, ganz willkürlich, die Nummern 8—1, um die verschiedenen Zähne benennen zu können.

Wenn wir uns zunächst den Ersatzzähnen zuwenden, so sehen wir, dass alle Zähne Ersatzkeime besitzen, ausser der Nummer 2 rechts, die nur eine Andeutung in der Form einer ausgebuchteten äusseren Schmelzepithelmembran zeigt. Alle Ersatzkeime alternieren sehr schön mit einander und in der Rekonstruktion sehen wir, dass auch die Nummern 2, 4 und 6 ein wenig lingualwärts einspringen, während im Präparate diese Zähnchen eine auffallend viel dünnere Dentinschicht besitzen, als ihre Sockel; manchmal sind sie sogar nicht einmal mit ihrem Sockel verwachsen und zeigt dieser noch deutlich die abgebrochenen Knochenspannen des Zahnes der älteren Generation. Die Nummern 2, 4 und 6 sind also offenbar die Ersatzzähne des ersten Odontostichos und müssen selbst daher zum dritten Stichos gehören. Weiter können wir feststellen, dass *ihre* Ersatzkeime, welche noch nicht dentinhaltig sind, lingualwärts von den andern Ersatzzähnen, welche wohl Dentin besitzen, einspringen; diese dentinhaltigen Ersatzkeime, welche zu 1, 3, 5 und 7 gehören, die, wie das Präparat zeigt, noch unersetzt sind, müssen also zur vierten Zahnreihe gerechnet werden. Der Ersatzzahn des meist distalen und ohne Zweifel nahezu jüngsten Keimes der beiden ersten Zahnreihen, besitzt schon Dentin, während der Ersatzkeim der Nummer 6 dentinlos ist; dieser scheinbare Widerspruch ist leicht zu erklären, wenn man sich erinnert, dass der Ersatzzahn 8 zu einer älteren Generation gehört als der Ersatzzahn 6.

Das Stadium *L* ist wieder weiter fortgeschritten und zeigt verschiedene Stufen der Ersetzung, sodass wir auch vom Zwischenkiefergebisse dieses Präparates kein Schema aufzustellen wagen. Sehr ins Auge springend ist aber wieder die regelmässige Alternation der Ersatzelemente, als unverkennbares Zeichen, dass auch hier eine Einreihung in Odontostichi vorliegt.

b. *Pflugscharbein*: [s. Fig. 3].

Das Pflugscharbein der erwachsenen Irisforelle enthält zwei Reihen Zähne, welche nahe bei einander parallel zu der Medianlinie verlaufen und zwischen die beiden Reihen der lingualen Zähne greifen. Das Vomer der Salmoniden zeigt an der mesialen Seite eine transversale Verbreiterung, die sogenannte „Chevron“, welche oft auch einige Zähne besitzt. OWEN schreibt hierüber ¹⁾: „In the young salmon there are two or three teeth on each side of the anterior part of the vomer; but, as growth proceeds, they are reduced in number, and finally disappear in aged fish.“ Leider konnte ich nirgendwo in der Literatur finden, wie die Verhältnisse bei *Salmo irideus* sind; ein erwachsenes Exemplar der Irisforelle aber zeigte beiderseits acht Zähne auf dem Vomerkörper und zwei auf der „Chevron“.

Jetzt werden wir nachgehen, wie das Vomergebiss sich in den Forellensarven anlegt; den ersten Anfang der Bezahnung des Pflugscharbeines finden wir erst im Präparate 48, also ziemlich spät. In diesem Stadium ist im linken Vomerteil eine Papille vorhanden, rechts noch keine.

¹⁾ R. OWEN: Odontography. London (1840—45).

In den Stadien *G*, *N* und **47** finden wir beiderseits auf geringer Entfernung von einander eine Papille im Epithel liegen.

Das Vomergebiss der Larve *O* besitzt links und rechts je zwei Keime.

Von diesen wird der mesiale von einer sehr jungen und flachen Papille dargestellt, während der distale viel älter ist und schon eine Scherbe Dentin aufweist. Diese ältesten Anlagen liegen etwas näher bei der Medianlinie als die jungen Papillen und hier sind solche Angaben zuverlässiger, als z. B. im Oberkiefer, weil hier die Abstände der beiderseitigen Elemente sehr gering sind und ein Verschieben oder Auseinanderreißen des Gewebes beim Schneiden praktisch ausgeschlossen ist.

Im Präparate **49** sehen wir in den horizontalen Schnitten, dass die drei Elemente, welche links und rechts vorhanden sind, eine deutliche Alterna-

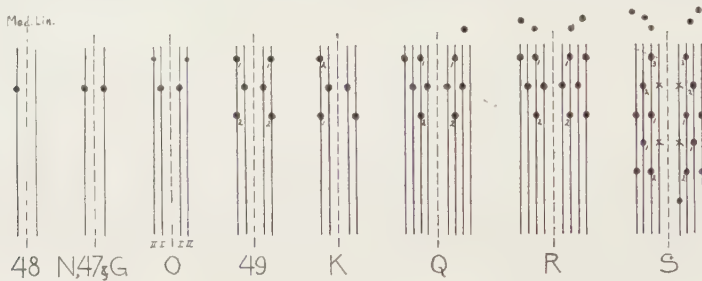


Fig. 3 Schemata der Gebisszusammensetzung auf dem Pflugscharbein der untersuchten Entwicklungsstadien.

tion zeigen, in dem Sinne, dass die mittleren, ältesten und reichlich dentinhaltigen Keime am meisten medial liegen.

Die mesialen Anlagen besitzen nur wenig Zahnbein, die distalen überhaupt nicht; sie müssen sich also in der genannten Reihenfolge angelegt haben. Wahrscheinlich ist es, dass die Alternation auch hier die Folge der Gebissanlage in *Odontostichi* ist und diese Wahrscheinlichkeit werden wir Sicherheit nennen können, wenn die übrigen Präparate beweisen, dass hier kein Zufall vorliegt, sondern dass das wirkliche Bauprinzip die Ursache der Alternation ist. Der mittlere Keim würde also zum ersten Sticho, die beiden andern Zähne zum zweiten gerechnet werden müssen, während im vorangehenden Präparate *O* die distale Anlage zur ersten, die mesiale zur zweiten Zahnreihe gehören müssten.

In der Larve *K* sind links drei, rechts nur zwei Elemente vorhanden; die beiderseitigen, in der Mitte gelegenen Zähne liegen wieder am nächsten bei einander und zeigen einen derben Dentinmantel. Die distal von ihnen liegenden Papillen liegen etwas mehr lateralwärts und sind zahnbeinlos; nur wenig jünger ist die Papille, welche am meisten mesial gelegen ist.

Das Vomergebiss im Präparate *Q* zeigt beiderseits deutlich das Homologon des ältesten Elementes der vorangehenden Stadien, nur ist es hier viel weiter entwickelt und sogar fast mit seiner Spitze durch das Epithel durchgebrochen.

Mesial und ein wenig lateral von ihm liegt sein papillenförmiger Ersatzzahn, mit welchem er in deutlichem Epithelverband steht. Beide Keime liegen rechts etwas mehr distalwärts als links, ebenso wie die übrigen Elemente. Distalwärts von dem alten Keime finden wir eine junge Anlage, welche links kein Dentin, rechts ausgiebig Zahnbein besitzt, während der letztere mit seiner Spitze nach mesial weist. Mehr nach vorne liegt

beiderseits ein schon weit entwickeltes Element, das massenhaft Dentin zeigt, aber doch bestimmt jünger ist als sein distaler Nachbar. Links hat sich mesial und ein wenig lateral von ihm eine sehr junge Ersatzanlage entwickelt, welche rechts fehlt. Zwar finden wir rechts mesial und lateral von dem genannten Elemente auch eine Anlage, welche sogar Zahnbein besitzt, aber diese ist bestimmt kein Ersatzzahn, liegt dazu ohnehin zu viel mesialwärts, mit ihrer Spitze nach hinten gerichtet. Während wir aus der Alternation der Keime schliessen können, dass der älteste, mittlere Zahn dem ersten, die mesial und distal angrenzenden Keime dem zweiten Odontostichos angehören, so könnte dieses ganz mesial gelegene Element z. B. den zweiten Keim des O I darstellen. Weil die übrigen Zähne ungefähr 30 bis 74 μ von der Medianlinie entfernt liegen, dieser aber nahezu 148 μ , so ist es nicht unmöglich, dass dieses das erste Element darstellt, welches den transversalen Teil, die „Chevron“, bezahnen wird.

Die erste Anlage des O I und die beiden ersten Keime des O II finden wir wieder in der Larve R.

Der erst genannte Zahn ist hier schon so alt, dass links seine laterale Seite Zeichen der Resorption zeigt, während rechts die Destruktion schon so weit fortgeschritten ist, dass das Mittelstück ganz fehlt und nur der Sockel und die Spitze übrig geblieben sind. Beiderseits ist ein grosser, dentinhaltiger Ersatzzahn vorhanden. Mesial von diesem Elemente liegt der älteste Zahn des O II, dessen zahnbeinhaltiger Ersatzkeim eine für das Pflugscharbein sehr ungewöhnliche Lage einnimmt, nämlich distal von dem alten Zahne, zu dem er gehört. Doch unterliegt es keinem Zweifel, dass dieses Element in der Tat ein Ersatzzahn ist. Ganz distal finden wir den zweiten Keim des O II, als kräftigen Zahn mit einem dicken Dentinmantel, der rechts eine kleine Papille als Ersatzkeim besitzt.

Die Alternation ist in diesem Präparate ebenfalls sehr deutlich und rechtfertigt die gegebene Einteilung in Stichi völlig.

Am meisten mesial treffen wir beiderseits noch zwei Keime an, von denen der älteste, dentinhaltige, zu weit von der Medianlinie entfernt liegt, um als Element des O I oder O II aufgefasst werden zu können, während lateral und ein wenig mesial von ihm eine kleine Papille liegt, die bestimmt nicht den Ersatzkeim seines Nachbarn darstellt, aber mit diesem zusammen als Elemente der „Chevron“ aufgefasst werden müssen. In der Tat sehen wir über diesen Zähnen eine dünne, aber breite Knochenspanne, welche sich zum transversalen Teile des Pflugscharbeines entwickeln wird und mit welcher der ältere der zwei Keime schon fast verwachsen ist.

Im Vomergebiss der Larve S sind schon mehrere Elemente ersetzt worden; beiderseits haben nämlich die zwei Elemente, welche die ältesten der ersten Zahnreihe gewesen sein müssen, ihren Ersatzzähnen, von denen der mesiale der jüngere ist, die Stelle geräumt.

Zwischen diesen beiden finden wir den ältesten Keim des zweiten Stichos, mit seinem dentinhaltigen Ersatzzahn, während das zweitälteste Element dieser Reihe, mit seinem Ersatzkeime distal vom zuerst ersetzten Zahne liegt; dieser Ersatzzahn ist links eine dentinlose Papille, während er rechts ein kleines Scherpbchen Zahnbein aufweist. Mesial liegt auch ein Element des O II, das sich als Nummer drei angelegt haben muss, aber noch keinen Ersatzkeim besitzt. Mesial von diesem Elemente finden sich links drei und rechts zwei Anlagen, welche in einer Linie liegen, die sich nach vorne zu immer mehr von der Medianlinie entfernt und welche Zähne wieder zu denen der „Chevron“ gerechnet werden müssen. Links ist der mittlere Keim der älteste, der distale der jüngste; rechts ist der distale älter als der mesiale, während alle fünf Elemente Dentin besitzen.

Wenn wir jetzt zu der Betrachtung der Stadien M und L übergehen, so finden wir, dass die Entwicklung des Vomergebisses einen gewaltigen

Sprung gemacht hat; die Larve *S* enthält im Pflugscharbein zusammen 20 Zahnelemente, in *L* zählen wir nicht weniger als 33. In *L* sowohl wie in *M* fällt eine Neigung der Vomerzähne auf, sich in die Medianebene zu sammendrängen zu wollen und gleichsam eine Linie zu formen. Dieses Phänomen scheint mir in Widerspruch mit dem Befunde bei dem von mir untersuchten erwachsenen Exemplare, wo deutlich zwei auf einiger Entfernung von einander liegende Reihen vorhanden waren. Es gibt aber Salmoniden, bei denen die Vomerzähne in einer einzigen Reihe angeordnet liegen, z. B. *Salmo salar* [R. KNOX: *Inquiries into the Philosophy of Zoology*. Zoologist Vol. 13. London (1855)]. Offenbar zeigen die Larven des *Salmo irideus* in diesem Stadium einige Ähnlichkeit mit ihren Verwandten, obwohl es mir unwahrscheinlich vorkommt, dass die Zähne sich in höherem Alter wieder in zwei Reihen einstellen würden.

Eine zweite Ueberraschung ist die Tatsache, dass in diesen beiden Präparaten keine Spur von Zähnen auf dem mesialen, transversalen Teil des Vomers zu sehen ist, während hier doch keine Fälle von „aged fish“ vorliegen, wo die Zähne nach OWEN verschwunden sein würden.

Von einer Alternation ist in diesen Präparaten natürlich nicht mehr die Rede, es fällt sogar schwer einige Regelmässigkeit in diesen Gebissen zu entdecken; viele Elemente sind schon ersetzt worden und öfters haben sich die Zähne links und rechts gegen einander verschoben. Nur ein einziges Mal sehen wir zwei Zähne mit ihren Ersatzkeimen in einer Gruppe von vier bei einander liegen.

SCHLÜSSE:

Aus den vier ältesten Stadien meiner Präparatenserie geht hervor, dass die Zähne des Zwischenkiefergebisses sich in Odontostichi anlegen. In den jüngsten Stadien ist von einem Bestehen von Zahnreihen keine Spur zu erkennen; erst bei den zuerst gebildeten Ersatzzähnen lässt sich eine Einreihung in Stichi feststellen. Ich bin der Meinung, dass die Zahnanlagen der beiden ersten Stichi sich mit geringerer Zeitdifferenz entwickeln, als diejenigen der späteren Zahnreihen und so eine anfängliche Gebissanlage in einer Linie vortäuschen. Betreffs der Elemente der dritten, vierten und weiteren Stichi sind die alten Verhältnisse erhalten geblieben und liegt deutlich eine Einteilung in Zahnreihen vor. Die Elemente der kombinierten ersten und zweiten Stichos legen sich in einer derartigen Reihenfolge an, dass sich wechselweise lateral und medial ein Keim den schon entstandenen Zähnchen zufügt.

Das Vomergebiss legt sich in Odontostichi an, welche sich in linguolabialer Richtung entwickeln; eine bestimmte Reihenfolge in der Anlage der Zahnelemente konnte nicht festgestellt werden.

In den ältesten Präparaten zeigte sich eine Neigung der Elemente, sich in der Medianebene in eine Reihe zu stellen.

Medicine. — *Ueber Interferenz mehrerer Arten von Nystagmus.* (Eine Antwort an die Herren J. LE HEUX und A. DE KLEYN, Utrecht). Von J. OHM, Augenarzt in Bottrop. (Communicated by A. DE KLEYN).

(Communicated at the meeting of March 28, 1936).

1. Die Wellenmechanik lehrt, dass beim Zusammentreffen mehrerer Wellenzüge, z. B. Tonschwingungen, eine Kurve entsteht, die genau der Frequenz, Amplitude und dem Phasenwinkel der Komponenten entspricht. Hat man eine Kurve mit einem periodisch wiederkehrenden Grundelement vor sich, so kann man sie gemäss dem Theorem von FOURIER in ihre pendelförmigen Bestandteile zerlegen. Wirken mehrere Erregungen durch die Sinnesorgane oder auf künstliche Reizung auf eine bestimmte Ganglienzellengruppe, so ist das Ergebnis nicht vorauszusagen, da sie die afferenten Erregungen umarbeitet.

Es ist vom physiologischen Standpunkt sehr lehrreich, derartige Untersuchungen auf dem Gebiete des Nystagmus anzustellen, was aber nur mit Hilfe der Nystagmographie zu brauchbaren Ergebnissen führen kann. Ich besitze davon sehr zahlreiche Kurven, von denen erst ein kleiner Teil veröffentlicht ist. Auch LE HEUX und DE KLEYN (= die A.) haben in dieser Zeitschrift (Bd. 38, S. 3 (1935)) mehrere sehr schöne Kurven mitgeteilt, deren Ergebnis bei der guten Technik einwandfrei ist. Da die A. aber daraus schliessen, dass „eine vestibuläre Genese des Dunkelnystagmus sehr unwahrscheinlich sei“ und damit meine Ansicht zu widerlegen suchen, muss ich sie verteidigen, zumal die Anschauungen DE KLEYNs ein besonderes Gewicht haben, da er zu den Schöpfern der modernen Vestibulariskunde gehört, die auch auf mich seit vielen Jahren einen grossen Einfluss ausgeübt hat.

Ich fasse unter der Bezeichnung „Dunkelnystagmus“ drei Störungen zusammen, den Ny. der Bergleute, den Ny. kleiner Kinder, die in dunklen Wohnungen leben, früher wegen des begleitenden Kopfzitterns als *Spasmus nutans* bezeichnet, und den Ny. der Hunde (RAUDNITZ) und Katzen (OHM), die bald nach der Geburt in einen dunklen Raum gebracht werden. Meine Ursachenformel lautet: $U = \frac{R}{B} \cdot Z$, worin R die das Labyrinth reizenden Faktoren, B die Beleuchtung und Z die Zeit bedeutet, die bis zum Auftreten des Ny. vergeht (= Inkubationszeit). Die A. erkennen B und Z an, nicht aber R unter Hinweis auf die bekannten Versuche von DE KLEYN und VERSTEEGH, die ergaben, dass der Dunkelny. der Tiere nach doppelseitiger Labyrinthentfernung nicht verschwindet und

sogar darnach noch zur Entwicklung gelangt. Ich habe diese Tatsache, die meinen 1915 in Gemeinschaft mit dem Ohrenarzt LÜBBERS unternommenen Versuchen widersprach, seit langem anerkannt. Die A. erklären es nun mit Rücksicht auf diese Versuche und ihre später zu besprechenden Kurven für unwahrscheinlich, dass für das Entstehen des Dunkelny. das Vestibularorgan eine *conditio sine qua non* darstellt, womit sie aber nicht sagen wollen, dass es den Dunkelny. nicht beeinflussen könne. Es stehe damit wie mit dem Einfluss des Kleinhirns, nach dessen gänzlicher Entfernung sich alle vestibulären Reflexe noch auslösen liessen, womit sie einen cerebellären Einfluss auf ihren Ablauf keineswegs läugnen wollen.

Die Autoren äussern sich nicht über den Reflexweg des Dunkelny. Ich glaube aber nicht fehl zu gehen, wenn ich ihnen die Anschauung unterstelle, dass sie die Augenmuskelkerne für die Zentrale halten, der optische und vestibuläre Reize auf ganz verschiedenen Bahnen zustreben. M. E. spielt sich der Dunkelny. ab auf der Strecke: Netzhaut, Sehbahn, Sehrinde, absteigende Sehstrahlung, Vestibulariskerne, Augenmuskelkerne. Das Gleiche gilt für den „optischen“ Ny. überhaupt, wenn ich der Kürze halber unter dieser Bezeichnung die Formen von Ny. zusammenfassen darf, die üblicherweise dem Augenarzt zu Gesicht kommen, in der Annahme, dass er irgend etwas mit den Augen zu tun habe, wobei ich gleich bemerke, dass diese Bezeichnung sehr unvollkommen ist, weil sich bei einem sehr erheblichen Bruchteil dieser Fälle mit den jetzigen Mitteln am optischen Apparat keine Störung nachweisen lässt.

Die Versuche, die an diesem Reflexweg unternommen wurden, sind von mir 1931 zusammengestellt.¹⁾ Seitdem ist kein Fortschritt erzielt.

Ich betrachte also die Vestibulariskerne für einen unentbehrlichen Teil auch des „optischen“ Ny., da ich sie für das sog. supranucleäre Blickzentrum halte, das alle auf die Augenmuskeln wirkenden „supravestibulären“ Erregungen, wozu in erster Linie vestibuläre, optische und willkürliche zählen, sammelt, in sich verarbeitet und dann als einheitliche „infravestibuläre“ Erregung zu den Augenmuskeln sendet. Daher rührt meine Bezeichnung: *Hauptaugenmuskelsender*²⁾. Wer diese Anschauung an ihrem zentralen Punkt experimentell angreifen will, muss beide Vestibulariskerne zerstören. BLOHMKE glaubte sie widerlegt zu haben, aber die A. bemerken mit Recht, dass seine Versuche nicht ohne weiteres gegen mich ins Feld geführt werden dürfen, weil ihm die Zerstörung nur auf einer Seite gelungen ist. Wenn sie nun hinzufügen, dass diese Versuche mit technischen Schwierigkeiten verbunden sind und dass die doppelseitige Kernzerstörung einen sehr schädigenden Einfluss auf das Allgemeinbefinden der Tiere ausübt, so muss ich bemerken, dass SPIEGEL aus anderen Gründen Einstiche in beide Kerne mit Erfolg ausgeführt hat, ohne dass die Tiere zugrunde gingen. Ich hoffe also, dass diese wichtigen Versuche

¹⁾ OHM, v. Gräfes Arch. f. O. **125**, 554.

²⁾ OHM, Zur Tätigkeit des Augenmuskelsenders. 2 Bände, Bottrop (1928 u. 1929).

an beiden Vestibulariskernen bei den Dunkeltieren eines Tages unternommen werden.

Das Wesen des Dunkelny. besteht darin, dass die Frequenz der von den Vestibulariskernen ausgesandten Erregungen zu klein, ihre Amplitude zu gross ist. Dies beruht auf zwei Wurzeln, einer optischen, nämlich der ungenügenden Lichtzufuhr (*B*), und einer labyrinthären, nämlich den Reizen, die von den Labyrinthen ausgehen (*R*). Es steht schon lange fest, dass beide Wurzeln bei den oben genannten drei Arten von Dunkelny. durchaus ungleich sind. Die labyrinthäre ist bei den Dunkelhunden, wie aus den Versuchen von DE KLEYN und VERSTEEGH hervorgeht, unnötig. Trotzdem besteht kein Zweifel, dass sie normalerweise bei ihnen eine Rolle spielt, denn wenn man die Tiere festbindet, wird ihr Zittern schwächer und hört bisweilen ganz auf. Es wäre auch der Mühe wert, festzustellen, wie sich Dunkelhunde mit und ohne Labyrinth in Bezug auf die Inkubationszeit (*Z*), die Stärke des Zitterns und die Genesungsdauer verhalten. Ich möchte jetzt schon vermuten, dass die labyrinthlosen Tiere in jeder Hinsicht günstiger dastehen werden.

Bei Kindern entwickelt sich der Dunkelny. im 1. oder 2. Jahr, d.h. zu einer Zeit, die für das Erlernen der aufrechten Haltung und des Gleichgewichtes erhebliche Anforderungen an den Vestibularapparat stellt, worauf bes. ZAPPERT¹⁾ hingewiesen, der auch hier meine Ursachenformel angenommen hat. Ich muss auch noch betonen, dass die optische Wurzel in unserer Gegend bei manchen Kindern viel weniger beteiligt sein kann, als z.B. bei den von RAUDNITZ in den sehr dunklen bzw. finsternen Wohnungen Prags beobachteten Fällen. Mein Assistent Dr. BROCKMEYER²⁾ hat in Bottrop die Wohnungen dieser Kinder untersucht und z. T. relativ recht gute Lichtverhältnisse angetroffen. Man kann also nicht sagen, dass sie so stark unter Lichtmangel zu leiden haben, wie die Dunkelhunde oder die Bergleute.

Was letztere angeht, so habe ich schon 1916 sehr exacte Beobachtungen über den Einfluss körperlicher Erschütterungen und der Haltung und Bewegung des Kopfes veröffentlicht, und ich muss hier einmal die Frage erheben: Wie kommt es, dass von den zahlreichen Autoren, die sich mit dem „Lagenystagmus“ seitdem beschäftigt haben, kein einziger darauf Bezug genommen hat, da sie doch nur durch den Einfluss der Labyrinth zu erklären sind? Da ich meine Beobachtungen an Hunderten von Fällen gemacht habe und auch jetzt noch jederzeit demonstrieren kann, dass es in der Entwicklung des beruflichen Augenzitterns, bzw. nach Verlassen der Grube in der Heilungsperiode ein Stadium gibt, in dem es nicht durch längeren Dunkelaufenthalt allein, wohl aber in Verbindung mit ihm durch Vornüberbücken bzw. heftige Bewegungen des Körpers hervorgerufen werden kann, so möchte ich im Hinblick auf die Versuche von

1) ZAPPERT, Med. Klinik, 335 (1924) und Handb. d. Neurol. d. Ohres. 3. Bd. (1926).

2) BROCKMEYER, Z. f. Augenh. 85, 121 (1935).

DE KLEYN und VERSTEEGH am Labyrinth der Dunkelhunde den Satz aufstellen: Wenn es möglich wäre, bei Bergleuten prophylaktisch beide Labyrinth ohne sonstigen Schaden zu entfernen, so würde ein grosser Teil von ihnen überhaupt nicht von Augenzittern ergriffen werden und die schon Erkrankten würden nach der Entfernung der Labyrinth viel schneller gesunden.

Ferner möchte ich noch kurz auf einen Bergmann mit linksseitiger Labyrinthfistel hinweisen, bei dem ich durch Druck auf den linken Tragus eine Kombination von Linksrucknystagmus und pendelförmigem Augenzittern d. Bergleute hervorrufen konnte, wovon letzteres ersteres noch eine Weile überdauerte.¹⁾ Dieser Fall zeigte auch bes. deutlich die Beziehungen der vestibulären Erregung zur Beleuchtung, insofern sein Fistenystagmus nicht nur im Dunkeln leichter auszulösen und von grösserer Amplitude war als im Hellen, sondern bes. auch darin, dass ihm im Dunkeln bisweilen ein auffallend starker und lange anhaltender nach rechts schlagender Nachnystagmus folgte, der ohne Nystagmographie nicht entdeckt wäre. Dieser Fall genügt, um die Behauptung aufzustellen: labyrinthäre Erregungen bleiben vielfach im Hellen latent und werden erst im Dunkeln manifest. Er unterstützt also meine Ursachenformel. Das Gleiche gilt vom verschiedenen Verhalten des vestibulären Drehnystagmus bzw. Nachnystagmus im Hellen und Dunkeln.

2. Nach dieser Einführung wende ich mich zu Kurve 2 der A., auf die DE KLEYN schon seit Jahren grossen Wert legt. Sie unterscheiden Ny. vestibulärer und nicht-vestibulärer Herkunft, wozu sie den Dunkelny. und den Ny. latens und amblyopicus rechnen. Man kann ihre Erläuterungen kurz in zwei Thesen zusammenfassen:

1. Kommen 2 Arten von Ny. verschiedener Herkunft zusammen, so tritt eine Superposition der Schwingungen ein (Fig. 2).

2. Treffen dagegen 2 vestibuläre Nystagmi aufeinander, so entsteht die Resultante, d.h. sie verstärken sich, wenn sie gleichgerichtet; sie schwächen sich, wenn sie entgegengesetzt gerichtet sind.

In Fig. 2 der A. handelt es sich um kleinschlägiges, ziemlich hochfrequentes Pendelzittern eines Dunkelhundes, worin bei Kaltspülung des rechten Ohres in grösseren Abständen grobschlägiger Linksnystagmus auftritt. Ich stelle ihr aus meinem Kurvenmaterial ganz ähnliche Kurven gegenüber, die zeigen, dass die gleiche Schwingungsform auf ganz verschiedene Weise zustande kommen kann.

Abb. 1. 2) Fall 1437. Wenn der Mann geradeaus auf die Mitte der mit 4 cm breiten weissen und schwarzen Streifen belegten optischen Drehtrommel blickt, hat er regelmässiges pendelförmiges Augenzittern d. Berg-

¹⁾ OHM, Acta oto-laryng. 9, 195 (1926).

²⁾ Anm. Da meine Kurven meistens vom rechten Auge aufgenommen werden, bedeutet die Hebung darin eine Links-, die Senkung eine Rechtsbewegung des Auges. Seine Bewegung wird durch die Hebelübersetzung 7 mal vergrössert. Zeit in Sekunden.

leute von kleiner Amplitude. Bei + beginnt sich die Trommel nach links zu drehen. Jetzt treten in gewissen Abständen optokinetische Rechtsrucke

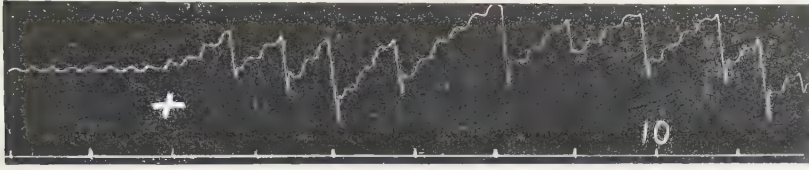


Abb. 1.

zwischen den Pendelschwingungen auf. Es kommt also zu einer Superposition von zwei Nystagmi, die von den A. als nicht-vestibulär bezeichnet bzw. als optisch bezeichnet werden müssen, wodurch ihre 1. These auf optischem Gebiet widerlegt wird.

Abb. 2.¹⁾ Fall 1684. Er sitzt im Dunkeln auf dem Drehstuhl und hat beim Blick gerade aus pendelförmiges Augenzittern d. Bergleute vermischt mit „seltenen“ Linksrucken. Bei + beginnt die Drehung des Stuhles nach rechts, worauf sofort vestibulärer Rechtsnystagmus einsetzt, in dessen langsamer Phase das berufliche Zittern mit seinen Pendelschwingungen weiter besteht, während seine „seltenen“ Linksrucke verschwunden sind. Es ist anzunehmen, dass sie durch den rotatorischen Rechtsnystagmus unterdrückt werden, wobei sie ihn wahrscheinlich etwas schwächen. Hiermit ist gegen These 2 bewiesen, dass auch aus 2 Nystagmi verschiedener Herkunft die Resultante entsteht. Zwischen dem beruflichen Pendelzittern und dem perrotatorischen Ny. kommt es zu Superposition. Nach Halt tritt ein kräftiger Linksny. auf, in dem sich wahrscheinlich der vestibuläre Nachny. und die „seltenen“ Rucke kombinieren, während die Pendelschwingungen durch ihn ganz oder fast ganz verdeckt werden. Man muss sich hüten, zu glauben, dass sie als nervöse Erregung nicht vorhanden sind; sie kommen nur bei meiner Art der Registrierung nicht zur Geltung. Etwa 10 Sekunden nach „Halt“, als der vestibuläre Nachny. schwächer geworden ist, werden sie wieder deutlicher und sind an Amplitude zunächst grösser als vor der Drehung.

Abb. 3. Wird der gleiche Mann nach links gedreht, so ist der Linksny. lebhaft und verdeckt jetzt den Pendelny. ganz oder fast ganz in ähnlicher Weise, wie in der vorigen Abbildung nach „Halt“. Umgekehrt sind die Pendelschwingungen nach „Halt“ in dem nach rechts gerichteten Nachny., dessen Frequenz viel kleiner ist, als die des perrotatorischen Linksny. wieder ebenso deutlich, wie in der vorigen Abb. während der Rechtsdrehung.

Abb. 4. Fall 1859. Er leidet an pendelförmigem Augenzittern der

¹⁾ Anm. Abb. 2 und 3 sind meinem Aufsatz in der Zeitschr. f. Hals-, Nasen- und Ohrenh. 23, 153 (1929) entnommen, der lehrreiche Interferenzen zwischen Augenzittern d. B. und vestibulärem Drehny. enthält.

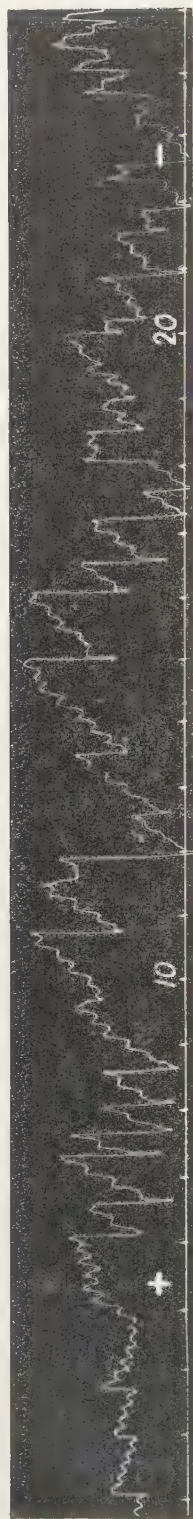


Abb. 2a.



Abb. 2b.

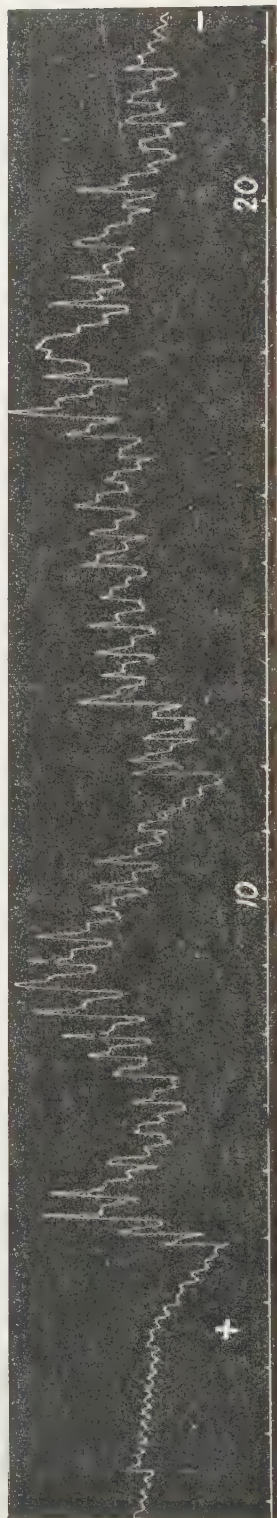


Abb. 3a.

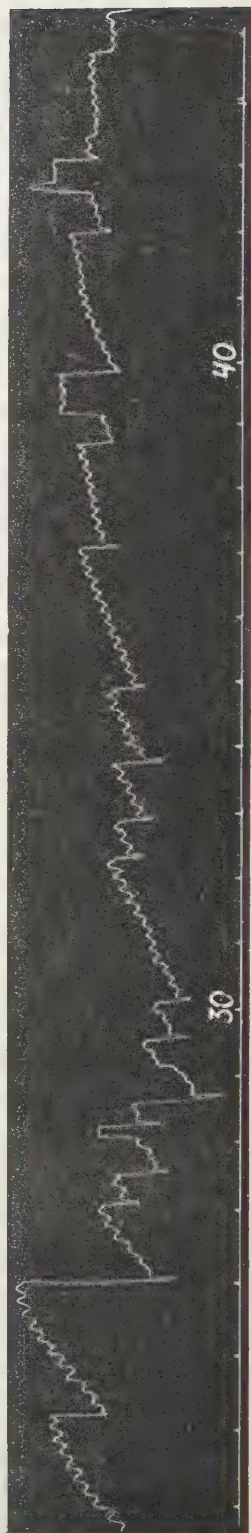


Abb. 3b.

Bergleute mit „seltenen“ Rechtsrucken (zuerst hell, bei — Stockdunkel). Auf letztere weise ich noch bes. hin, da die meisten Autoren diesen Ny. für pendelförmig halten und füge zur Erklärung Folgendes hinzu. Er beginnt immer reinpendelförmig. Bei einem Teil der Fälle gesellen sich nach mehr oder minder langer Zeit die „seltenen“ Rucke hinzu. Verlassen diese Kranken die Grube, so verschwinden zuerst diese Rucke und zuletzt die Pendelzuckungen. Letztere zeigen die feinere, erstere die gröbere Störung in den vestibulären Kernen an.

Abb. 5. Fall 270a. Amblyopischer Ny. bei einem Albino ($r. = \frac{4}{36}$; $l. = \frac{4}{18}$). Das Kurvenbild ist dem vorigen sehr ähnlich und wird von mir in gleicher Weise auf eine feinere und gröbere „vestibuläre“ Erregung zurückgeführt.

Abb. 6. Der gleiche Fall zeigt bisweilen bei gradeausgerichtetem Blick Ruhe der Augen. Wird nun bei + die optische Drehtrommel nach rechts in Gang gesetzt, so tritt ein Rechtsnystagmus auf, in dessen langsamer Phase Pendelschwingungen vorhanden sind. Es ist offenbar ein etwas modifizierter Spontanny. Wir bezeichnen dieses Verhalten als „Inversion“, weil die Rucke nach der Seite der Trommeldrehung schlagen. Der optokinetische Reiz bringt also eine Superposition von zwei der Herkunft nach als „optisch“ zu bezeichnenden Nystagmi hervor, was mit der These 1 nicht in Einklang zu bringen ist.

Abb. 7. Wird bei dem gleichen Fall zu einer Zeit, wenn die Augen ruhig sind, die Trommel nach links gedreht, so kommen kleine Pendelschwingungen zum Vorschein, die in grösseren Abständen mit kleinen Linksrucken vermischt sind. Die vorige Erläuterung lässt sich auch hier anwenden.

Abb. 8. Der gleiche Fall. Er sitzt im Hellen auf dem Drehstuhl und zeigt wie in Abb. 5 zunächst Pendelzittern + seltene Rechtsrucke. Von der 45.—50. Sek. wird der Stuhl 1 mal nach links umgedreht. Jetzt entsteht eine unregelmässige Kurve, in der man wohl noch Pendelschwingungen, aber weder einen regelmässigen perrotatorischen Linksnny. noch den Spontanny erkennen kann. An ihrer Stelle finden sich nur einige grosse Zickzackbewegungen. Nach „Halt“ kommt der Spontanny, sofort mit allen Eigentümlichkeiten wieder, aber die Amplitude der Rechtsrucke ist erheblich grösser, wodurch bewiesen wird, dass hier ein „optischer“ und ein vestibulärer Ny. eine Resultante ergeben.

Von den übrigen Kurven der A. möchte ich nur noch Fig. 6 mit Bemerkungen versehen. Hier ist zunächst ein Linksnystagmus bei Kaltspülung des rechten Ohres aufgezeichnet. Wird nun gemäss BLOHMKE die Uebergangsstelle von Thalamus und vorderem Vierhügel auf der rechten Seite faradisch gereizt, was für sich allein auch einen Linksnystagmus hervorruft, so nimmt der kalorische Ny. an Frequenz und Amplitude erheblich zu. Die A. halten diesen „elektrischen“ Ny. als „eine Art vestibulärer Nystagmus“ und glauben hierin mit BLOHMKE übereinzustimmen. Das ist ein Irrtum, denn BLOHMKE hat in seiner 1. Mitteilung dessen Beziehungen zum vesti-

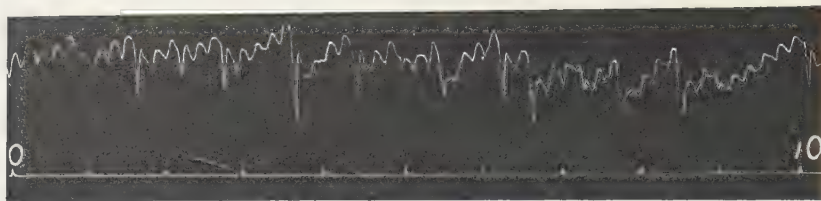


Abb. 4.

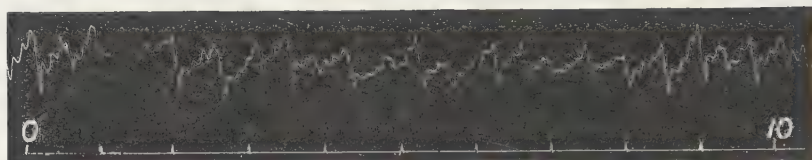


Abb. 5.

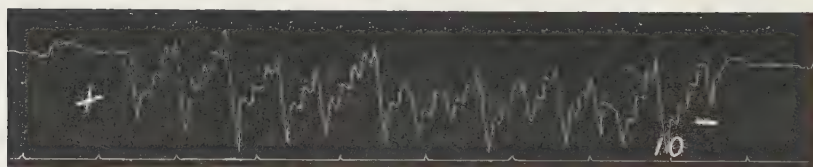


Abb. 6.

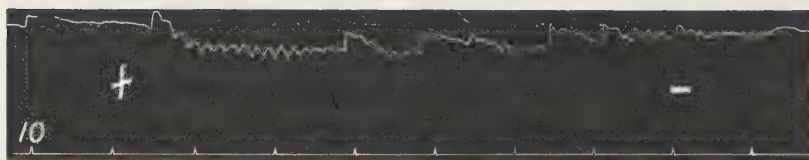


Abb. 7.

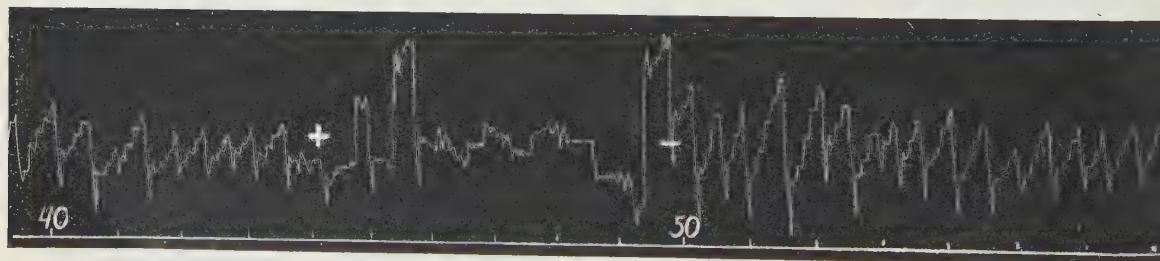


Abb. 8.

bulären System wohl erwogen, aber offen gelassen, und in seiner 2. Mitt. ein eigenes recht ausgedehntes Nystagmuszentrum in der Sub. retic. zwischen dem 3. und 6. Kern angenommen, ohne Verbindungen zu den vestibulären Kernen einzuzeichnen. Ich habe diesen elektrischen Ny. immer für eine faradische Erregung eines vestibulären Kerns gehalten, da ich der Ansicht bin, dass alle ruckförmigen Bewegungen der Augenmuskeln letzten Endes auf vestibulären Entladungen beruhen.

Es ist unbedingt nötig, scharf zu definieren. Der Ny., der durch Reizung der Nervenendigungen im Labyrinth erzeugt wird, muss als labyrinthär bezeichnet werden (rotatorischer, kalorischer Ny.). Der galvanische Nystagmus kann vestibulär genannt werden, weil er auf Erregung des Ganglion vestibulare beruht (DOHLMANN). Zentral-vestibulär ist der Ny. bei Störungen der Kerne selbst (multiple Sklerose, Bechterews Ny., Dunkelny. und amblyopischer Ny.). Dazu kommen nun noch drei weitere Möglichkeiten, die man am besten als „supravestibulär“ bezeichnet, da die Erregungen von höheren Gehirnbezirken herrühren (willkürlicher, optokinetischer und faradischer Ny. BLOHMKE). Letzterer beruht auf dem Einfluss gewisser Teile der Stammganglien, deren Beziehungen zum vestibulären System bes. MUSKENS¹⁾ mit grossem Eifer erforscht hat.

3. Alle genannten Nystagmi sind ruckförmig mit Ausnahme der meisten Fälle des Dunkel- und eines Teiles der Fälle von amblyopischem Ny. Teile ich hier noch einmal, wie es üblich ist, die Nystagmi in optische und vestibuläre, so kann ich meine Ansicht über die Interferenz folgendermassen zusammenfassen.

a. Treffen zwei Rucknystagmi, gleichgiltig ob beide optisch, oder beide vestibulär oder einer optisch und der andere vestibulär, aufeinander, so bilden sie die Resultante in dem Sinne, dass sie einander verstärken, wenn sie nach der gleichen Richtung schlagen, oder schwächen, wenn sie entgegengesetzt gerichtet sind. Die Resultante ist aber keine physikalische, sondern eine physiologische und kann im Einzelfall nicht aus dem Komponenten berechnet werden, sondern ergibt sich nur mit Hilfe der Nystagmographie in befriedigender Weise.

b. Stösst aber ein Ruckny. mit einem Pendelny. zusammen, so kommt es zu einer Superposition, mag der Ruckny. nun vestibulär oder optisch sein. Die A. hätten die Unrichtigkeit ihrer ersten These selbst erkannt, wenn sie den Hund mit Dunkelzittern ihrer mit Kaninchen besetzten optokinetischen Drehscheibe gegenübergesetzt hätten. Da es einen „labyrinthären“ oder „vestibulären“ Pendelny. bis jetzt noch nicht gibt, besteht keine Möglichkeit, Combinationsversuche mit vestibulärem Ruckny. anzustellen.

c. Bei den Interferenzstudien an 2 Formen von Ny. muss man ihr Stärkeverhältnis beachten. Stösst ein sehr schwacher Ny. mit einem sehr

¹⁾ MUSKENS, Das supra-vestibuläre System (1935).

starken Ny. anderer Herkunft zusammen, so kann letzterer den ersteren ganz verdecken, wie ein lauter Ton einen leisen. Durch entsprechende Verfeinerung der Apparatur wird es gelingen, auch die schwache Komponente nachzuweisen.

4. Zum Schluss möchte ich mir die Möglichkeit nicht entgehen lassen, an Abb. 6 der A., die eine Kombination zwischen kalorischem und elektrischem Ny. wiedergibt, eine Bemerkung anzuknüpfen, die aufklärend wirken kann. Ich gehe von folgender Versuchsanordnung aus. Die Person sitzt auf dem Drehstuhl innerhalb eines grossen, mit 8 cm breiten weissen und schwarzen Streifen bemalten Zylinders. Wird letzterer gedreht, so entsteht optokinetischer Nystagmus auf der Bahn: Netzhaut, Sehrinde, Vestibulariskerne, Augenmuskeln. Dreht man den Stuhl im Stockdunkeln, so tritt vestibulärer Ny. ein auf der Strecke: Labyrinth, Vestibulariskerne, Augenmuskeln. Dreht man den Stuhl im Hellen, so bildet sich ein optokinetisch-vestibulärer Ny., der die beiden vorhin genannten Nystagmi an Stärke übertrifft. Nehmen wir nun an, die Person werde zunächst im Dunkeln gedreht, und es werde kurz nachher hell gemacht, so lassen wir auf den vestibulären Reiz einen optischen einwirken, tun also etwas ganz Ähnliches, wie die A. in ihrer Abb. 6. Wie nun die A. in Uebereinstimmung mit mir annehmen, dass der von Thalamus kommende faradische Reiz auf einen Vestibulariskern einwirkt, so tue ich dasselbe bezüglich des optokinetischen, und zwar aus folgendem Grunde. Es ist durchaus unwahrscheinlich, dass der reinvestibuläre Ny. mit dem optokinetischen in Bezug auf Frequenz und Phasenwinkel genau übereinstimmt. Das ist schon deshalb nicht möglich, weil der vestibuläre Reiz wegen der Beschleunigungsänderung eine veränderliche Grösse ist, während der optokinetische constanter bleibt. Da nun während der Drehung im Hellen ein ziemlich regelmässiger Ruckny. auftritt, so müssen wir annehmen, dass vestibuläre und optische Erregung im gleichen Zentrum zusammentreffen, wo sie zu der rhythmischen Entladung umgearbeitet werden. Das sind die Vestibulariskerne.

Hiermit danke ich Herrn DE KLEYN, dass er mir die Möglichkeit verschafft hat, meine Beobachtungen in der Zeitschrift eines Landes mitzuteilen, das seit DONDERs so zahlreiche ausgezeichnete Forscher auf dem Gebiet der Augenbewegungslehre hervorgebracht hat.

Medicine. — *Degenerated cysts and black spores in Anopheles infected with benign tertian malaria.* By A. DE BUCK. (From SWELLEN-GREBEL's Laboratory in the Institute of Tropical Hygiene [Director Prof. Dr. W. A. P. SCHÜFFNER] of the Royal Colonial Institute at Amsterdam). (Communicated by Prof. W. A. P. SCHÜFFNER).

(Communicated at the meeting of March 28, 1936).

In another paper ¹⁾, recording some experiments on the influence of cold on the development of the malaria parasite in the mosquito, I referred to the degeneration of oocysts at various stages of their growth. This may be caused by cold, but it may likewise occur under favourable conditions of temperature and humidity, especially if the number of zygotes is excessively large. In the case of cold being the cause, the visible signs of degeneration do not as a rule make their appearance till after the mosquitoes have again been returned to an environment with a more favourable temperature. Often the only symptom of degeneration is a white or yellowish opaqueness of the oocyst, the cytoplasm having a finely granular appearance. Other cysts have coarser granules and the coarser these granules, the darker the yellow colour. Often in this granular substance are seen a number of larger grains and globules, of various sizes, which mostly have a light-coloured centre (Fig. 5). All these types can be found before any of the cysts have reached maturity; I therefore conclude that these are cysts which have degenerated at an early stage.

In one experiment I met with a peculiar type of degenerated cysts: clear cysts with a large brown or yellow centre which in its turn may have a darker inner part (Fig. 8). These cysts showed an apparently normal development until the day on which the first sporozoites were found in the glands. Then a mosquito was dissected with as many as 70 cysts of this type. Some of these showed a few "small black spores" adhering to the brown centre (Fig. 9). From these facts I infer that these cysts have degenerated after they had already proceeded to the formation of the sporozoites. At which stage of this process degeneration sets in I leave undecided.

In the "degenerated" cysts I do not include the "black spore cysts". By the name of black spores I only mean the typical sausage- or banana-shaped bodies. They do not always occur as definite black spore cysts. Mostly there is nothing like a cyst wall visible, often the black spores form only a loose swarm with or without a denser centre, often a few

¹⁾ This paper will be published in The American Journal of Hygiene of July 1936.

single black spores are scattered over the stomach (Figs. 1, 2, 3). Exactly the same type of black spores often occur on the salivary glands (Fig. 6). The shape and the light inner part of these bodies is very suggestive of the idea that they are chitinized sporozoites. Already GRASSI was of this opinion. Their formation seems to proceed so rapidly that as yet no one has been able to trace this hypothetical development. Still I feel strongly inclined to accept this view. In other words, typical black spores are only found, when the cysts have normally developed and reached maturity (see also BRUG, 1916).

Perhaps I had better not use the word "chitinized", since the chitinous nature of these bodies is as yet not absolutely certain. The same applies to the brown corpuscles and granules in the degenerated cysts and also to the brown centre of the above-described peculiar kind of degenerated cysts which, as my own observations have shown, is indissoluble in caustic potash.

KNOWLES and BASU (1933) speak of "degeneration and pigmentation" instead of chitinization and they are convinced that the pigment is derived from the parasite and not from the mosquito. This may be true, though I cannot agree with them that this "appears clear" from their Plates XXIX and XXX.

As I said before, I feel strongly inclined to accept GRASSI's view, and in this connection I think we may see in the small black spores adhering to the brown centre of some degenerated cysts the missing link in the development of the sporozoites into the typical black spores. The question, whether this is a process of exogenic chitinization or endogenic pigmentation is connected with the question, whether the sporozoites are transformed into black spores while they themselves and the oocyst are still living or after their death. KNOWLES and BASU believe black spores lying free in the coelomic cavity or elsewhere to be the result of rupture of the oocysts in dissection or in nature. Now anybody who has examined black spore cysts knows that these structures are very resistant and can only be crushed by pressing hard on the cover glass, but then the black spores themselves are crumbled into irregular pieces; indeed they do not seem apt to rupture and scatter their black spores all over the body of the mosquito. In my opinion, therefore, the black spores lying free outside oocysts have arisen from sporozoites which were transformed into black spores after their being expelled from ripe and ruptured cysts.

It is surprising how few observers have mentioned the presence of black spores on the salivary glands. Yet these black spores, which always have the typical banana-shape, are as frequent as those occurring on the stomach; they are never found in the cells of the salivary glands, but only on the coelomic surface of the glands (see also WALCH, 1921). These loose and scattered black spores are perhaps a support to the opinion that they are not the result of a process of endogenic pigmentation, but of exogenic chitinization, since it might seem inexplicable how these sporo-

zoites are able to produce the sometimes exceedingly thick layer of "pigment" they are enclosed by. Moreover, if chitization by the insect host gives rise to the black spores, it might be supposed that only dead or weakened sporozoites are chitinated, which would account for the fact that black spores are relatively scarce.

MAYNE (1919, p. 129) has said that "true chitin is of ectodermal origin and that the tracheae are the only ectodermal tissue present inside the mosquito's body", as a support of his theory that black spores are of tracheal origin. But it has as yet not been proved that black spores consist of true chitin and, moreover, an abnormal process of chitization may as well abnormally originate from other than ectodermal cells. I for my part have never in a single instance been able to establish the alleged connection between black spores and the tracheal system¹), not even in the specimen of Fig. 2 which showed many very long and curved black spores in which the layer of "chitin" was only very thin or even partly absent. The minute terminal tubes of the tracheae, which could be traced into the immediate vicinity of the swarm of black spores (though they are no longer visible in the photograph), had the same calibre and were curved in exactly the same manner as the black spores of this specimen. Indeed the resemblance was highly suggestive of a close relationship of these black spores to the tracheal system. Yet, even in this instance no direct connection between the two structures could be ascertained, nor was it possible to speak with MAYNE of a "snarl of tracheae" (p. 129), for the whole was really a "swarm of black spores", there being no connection between the single bodies.

From all this it may be gathered that I am convinced that the "typical black spores" are associated with sporozoites and that I do by no means agree with MAYNE, who speaks of the error of associating black spores with malaria parasites and infectivity. In some 1700 specimens dissected before the date on which ripe sporozoites could be expected, I only once observed typical black spores, on the seventh day following infective bite, but this was in a batch of wild mosquitoes caught in a stable in the neighbourhood of Amsterdam; so in this case it cannot be excluded that the black spores were the result of an old infection contracted in the wild state. In laboratory-bred uninfected mosquitoes I have never found typical black spores. It would be interesting if MAYNE had given photomicrographs of the black spores which he has observed in unfed laboratory-bred females and males of *Anopheles* and *Culex* and in house-flies. Now we can only accept the view of KNOWLES and BASU that all these apparently non-

¹) The only finding which might seem to contradict this was a structure of exactly the same appearance as that represented by MAYNE (Plate XII, Fig. 18). It was found in a wild uninfected female of *A. maculipennis*. The spiral markings of the trachea were even visible within the dark-brown body. If this, however, were to be the normal mode of origin of typical black spores, I think it would be strange that similar findings are not more common.

malarial black spores recorded by MAYNE are not typical black spores, but must belong to the other structures which they separate from the true black spores as "chitin corpuscles" and "fungus infections of the tracheal system" (p. 773 l.c.). Of these latter structures I have seen a few remarkable examples in which the greater part of the stomach was wrapped in by what might be interpreted as hyper-chitinized tracheae or hyphomycetes or both.

Of course, it should be admitted that it is quite possible that these "pseudo-black spores" sometimes develop in such a way as closely to resemble the typical black spores and, therefore, we may in a sense agree with MAYNE "that one of the practical points to consider is to guard against applying the presence of black spores as a test of any pathogenic relationship to malaria, especially in the absence of parasites" (p. 130). Great care should be taken, whenever no parasites are found, to conclude from the presence of a few black spore-like structures to previous malarial infection of the mosquito.

It is interesting in this connection to compare the above-described specimen of Fig. 2 with that of Fig. 4. This photograph represents the stomach of a wild female which did not harbour oocysts on the stomach nor sporozoites in the glands. As it was caught in a house where a number of infected females were found on the same day, one might be inclined to regard this stomach as covered with black spores and consequently as a sign of heavy infection. Yet, this female was registered as negative and the structures represented here were considered as "pseudo-black spores". They covered half of the stomach, their colour was light-brown, and in several places they could be traced as long uninterrupted threads which in the denser parts formed an entangled mass; some of the threads have the appearance of a string of beads, as is seen in the figure, but the single beads have no resemblance to typical black spores. These structures are apparently very rare; they were observed only twice on some thousands of dissected stomachs.

Special caution is required in the case of another group of pseudo-black spores which I am inclined to consider as chitinized bacteria and which we are wont to call "coffee-beans" at our institute, because of their peculiar shape (Fig. 7). They may occur in dense clusters; sometimes even what may look like a cyst-wall is present and then, in consequence of the dark-brown colour of the whole, it is not always easy to ascertain the characteristic coffee-bean-shape of the single parts. These cyst-like structures might be taken for true black spore cysts on a too superficial examination.

But apart from a few exceptional cases, a trained observer will have no difficulty in making sure, whether the structures he is examining are true or pseudo-black spores. This statement, however, is only meant to be valid with regard to benign tertian malaria and *Anopheles maculipennis*. I am well aware that the species both of mosquito and malaria parasite

A. DE BUCK: DEGENERATED CYSTS AND BLACK SPORES IN ANOPHELES
INFECTED WITH BENIGN TERTIAN MALARIA.

PLATE I.

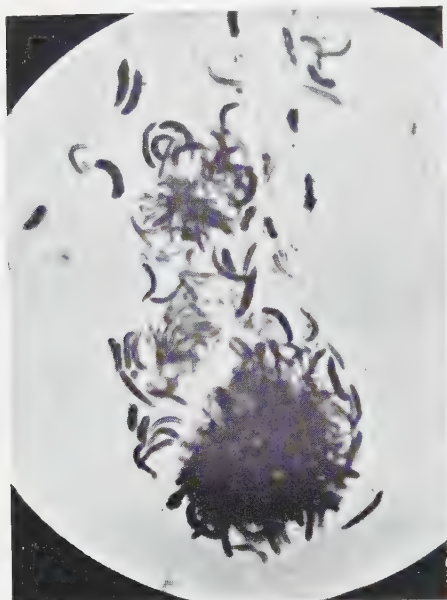


Fig. 1.

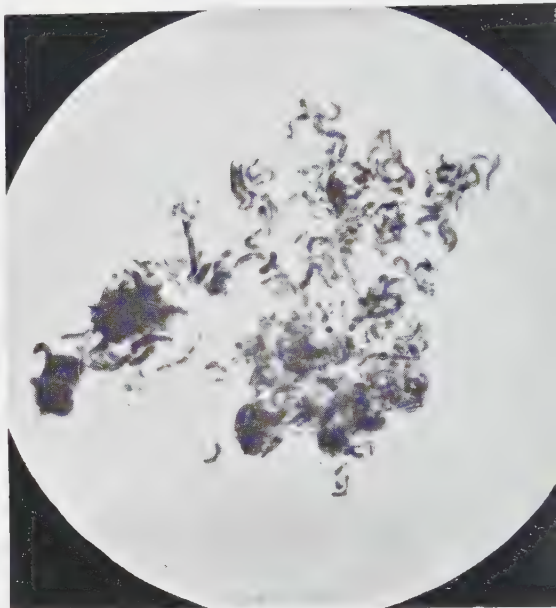


Fig. 2.

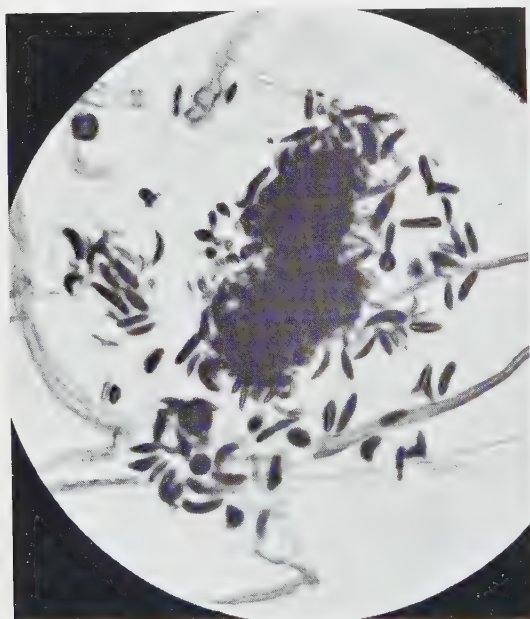


Fig. 3.

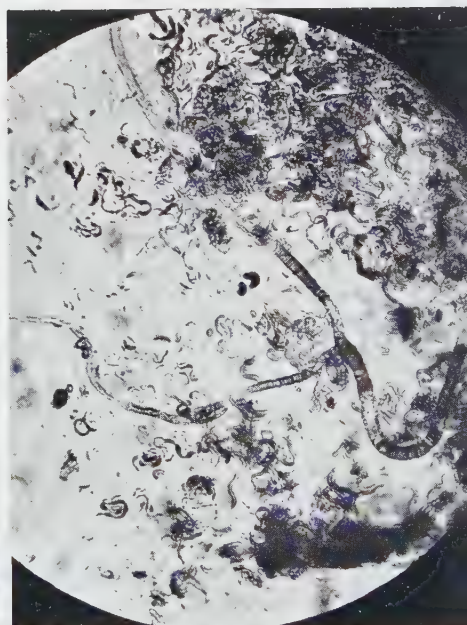


Fig. 4.

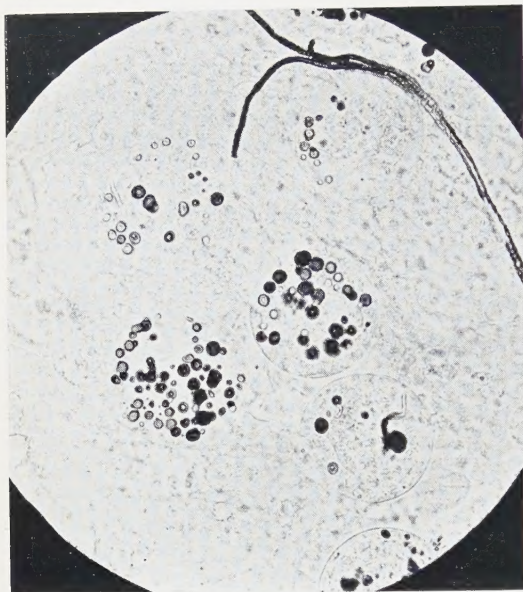


Fig. 5.

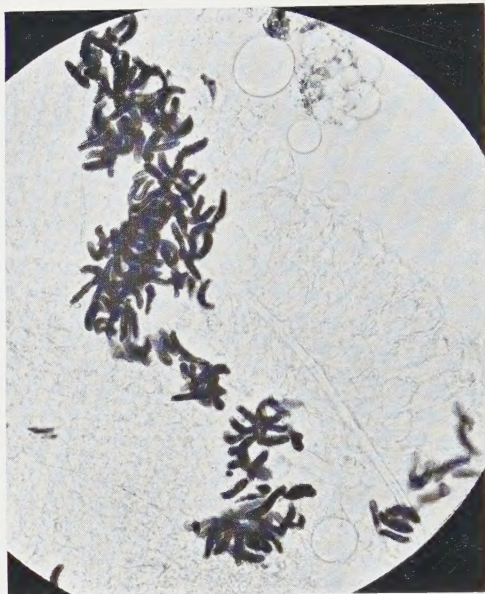


Fig. 6.

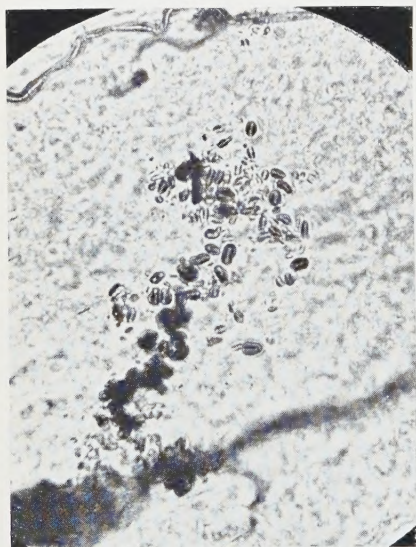


Fig. 7.

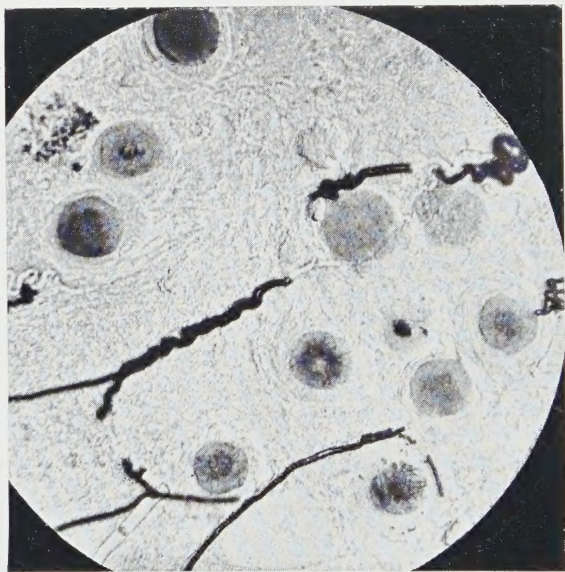


Fig. 8.

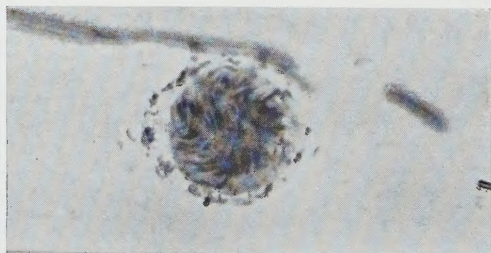
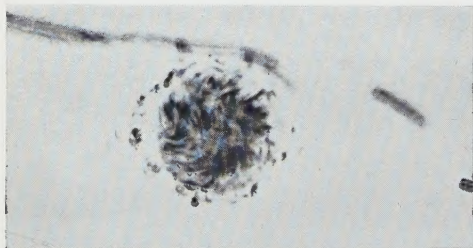


Fig. 9.

may have some influence on the occurrence and shape of all these structures.

Summary.

1. Typical banana-shaped black spores are not found before the cysts have reached maturity.
2. Typical black spores are never found in uninfected *Anopheles*.

REFERENCES.

- BRUG, S. L. (1916). Die schwarzen Sporen ("black spores") bei der Malariainfektion im Mückenkörper. *Archiv f. Prot.* **36**, 188—197.
- KNOWLES, R. and B. C. BASU (1933). The nature of the so-called "black spores" of ROSS in malaria-transmitting mosquitoes. *Ind. Journ. Med. Res.* **20**, 757—776.
- MAYNE, B. (1929). The nature of the "black spores" associated with the malaria parasite in the mosquito and their relationship to the tracheal system. *Ind. Journ. Med. Res.* **17**, 109—134.
- WALCH, E. (1921). Sur les "Black spores" et autres corps chitinisés dans les *Anopheles*. *C. R. du 4me Congrès de la Far Eastern Assoc. of Trop. Med.*

EXPLANATION OF THE PLATES.

- Figs. 1, 2 and 3. True black spores on the stomach of infected mosquito. Magnified 325 \times .
- Fig. 4. Pseudo-black spores on the stomach of a wild anopheles. Magnified 200 \times .
- Fig. 5. Degenerated cysts. Magnified 370 \times .
- Fig. 6. Black spores on salivary gland. Magnified 325 \times .
- Fig. 7. Pseudo-black spores: "coffee-beans". Magnified 450 \times .
- Fig. 8. Degenerated cysts on the stomach of a mosquito which was kept at room-temperature for one month after the infecting meal. Magnified 275 \times .
- Fig. 9. Degenerated cyst of the specimen of Fig. 8, magnified 580 \times . Small black spores adhering to the brown centre. Two different reprints of the same negative.

